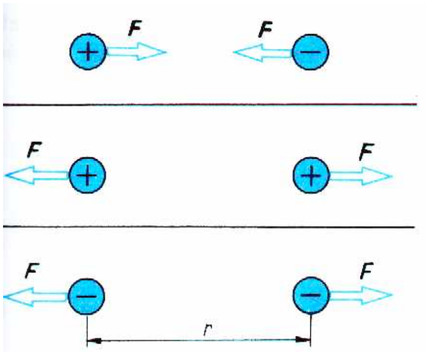
1. Elektrostatyka

1.1. Ładunek elektryczny.

Cała otaczająca nas materia składa się z elektronów, protonów i neutronów. Dwie z wymienionych cząstek - protony i elektrony - obdarzone są właściwością zwaną ładunkiem elektrycznym. Właściwość ta sprawia, że cząsteczki działają wzajemnie na siebie siłą elektrostatyczną. Cząstki tego samego rodzaju tzn. dwa elektrony lub dwa protony odpychają się wzajemnie, natomiast elektron z protonem działają na siebie siłą przyciągającą (rys 1.1). Dla odróżnienia przyjęto nazywać ładunek elektronu ładunkiem ujemnym, a ładunek protonu ładunkiem dodatnim. Co do wartości bezwzględnej ładunki protonu i elektronu są równe.

Ładunek elektronu równy 1,6 10^{-19} C nazywany jest ładunkiem elementarnym i oznaczany symbolem *e*.

Naładowane ciało, tzn. takie które ma w swoim składzie nierówną liczbę protonów i elektronów, może mieć ładunek równy jedynie całkowitej wielokrotności ładunku *e*.



Rys.1.1 Kierunki siły elektrostatycznej dla ładunków o różnych znakach

Ładunki elektryczne podlegają zasadzie zachowania ładunku. To podstawowe prawo fizyki oznacza, że w zamkniętym układzie wypadkowa ilość ładunku będzie pozostawała stała. Zasada ta obowiązuje nawet w przypadku anihilacji naładowanych cząstek.

1.2. Prawo Coulomba

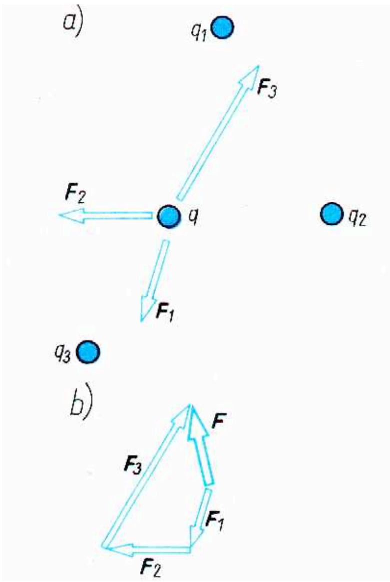
Prawo Coulomba mówi, że wartość siły jaką działają na siebie dwa ładunki jest wprost proporcjonalna do iloczynu tych ładunków q_1 i q_2 i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości r między nimi

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad 1.1$$

gdzie k_0 jest wyznaczonym doświadczalnie współczynnikiem proporcjonalności noszącym nazwę stałej Coulomba. Do obliczeń siły można przyjąć z dostatecznym przybliżeniem wartość współczynnika $k_0 = 9 * 10^9$ N m^2/C^2.

Siła elektrostatyczna jest podobna w swoim działaniu do siły grawitacyjnej, ale jest od niej wielokrotnie silniejsza. Obliczając stosunek siły elektrostatycznej do siły grawitacyjnej dla dwóch protonów otrzymamy:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{-k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}}{G \frac{m_1 m_2}{r^2}} = -\frac{k_0 e^2}{G m_p^2} = -\frac{9 \times 10^9 \times \left(1{,}6 \times 10^{-19}\right)^2}{6{,}7 \times 10^{-11} \times \left(1{,}67 \times 10^{-27}\right)^2} = -1{,}23 \times 10^{36}$$



W przypadku gdy mamy do czynienia z większą liczbą ładunków, wypadkową siłę działającą na poszczególne ładunki możemy obliczyć z zasady superpozycji (rys 1.2). W praktyce często zamiast ładunków punktowych spotykamy rozciągłe jednorodnie naładowane ciała, np. naładowany pręt lub płyta będąca okładką kondensatora. W takim przypadku siła Coulomba będzie równa $\vec{F} = \int d\vec{F}$, gdzie dF jest siłą pochodzącą od każdego elementu naładowanego ciała.

Rys.1.2 Zasada superpozycji sił elektrostatycznych

1.3. Pole elektryczne

Siły elektrostatyczne działają na odległość, co oznacza, że wokół każdego ładunku istnieje pewien obszar lub inaczej pole działania sił elektrostatycznych nazywane polem elektrycznym. Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w danym punkcie przestrzeni definiujemy jako siłę elektryczną działającą na ładunek próbny umieszczony w tym punkcie podzieloną przez wartość ładunku.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad 1.2$$

Natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową, a jego kierunek jest zgodny z kierunkiem siły działającej na dodatni ładunek próbny. Jednostką natężenia pola z definicji jest niuton na kulomb, w praktyce częściej używana jest równoważna jej jednostka równa volt na metr.

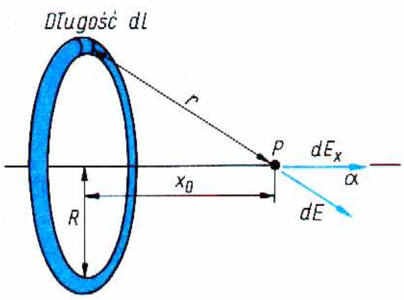
W najprostszym przypadku, pole w punkcie P odległym o r od ładunku punktowego można opisać zależnością:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{q}\left(k_0 \frac{qQ}{r^2}\vec{r}\right) = k_0 \frac{Q}{r^2}\vec{r} \qquad 1.3$$

Gdzie $\vec{r}$ jest wektorem jednostkowym skierowanym od Q do P

Podobnie jak w przypadku sił elektrostatycznych pole elektryczne pochodzące od n ładunków punktowych będzie równe sumie wektorowej pól pochodzących od poszczególnych ładunków. W przypadku naładowanych ciał rozciągłych do obliczenia pola użyjemy całki.

Jako przykład obliczmy pole elektryczne pochodzące od naładowanego pierścienia o promieniu R i ładunku całkowitym Q. Będziemy liczyć pole wzdłuż osi pierścienia w odległości x_0 od jego środka (rys 1.3)



Rys.1.3. Pole wytwarzane przez jednorodnie naładowany pierścień

Podzielmy pierścień na odcinki dl. Każdy taki odcinek możemy traktować jak ładunek punktowy równy λdl, gdzie $\lambda = Q/2\pi R$ jest liniową gęstością ładunku rozłożonego na pierścieniu. Pole w punkcie P pochodzące od tak zdefiniowanego odcinka pierścienia można opisać zależnością:

$$dE = k_0 \frac{\lambda dl}{r^2}$$

Ze względu na symetrię układu składowa E_y pola będzie równa zero, natomiast pochodząca od odcinka dl składowa E_x będzie równa:

$$dE_x = k_0 \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha = k_0 \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{x_0}{r}$$

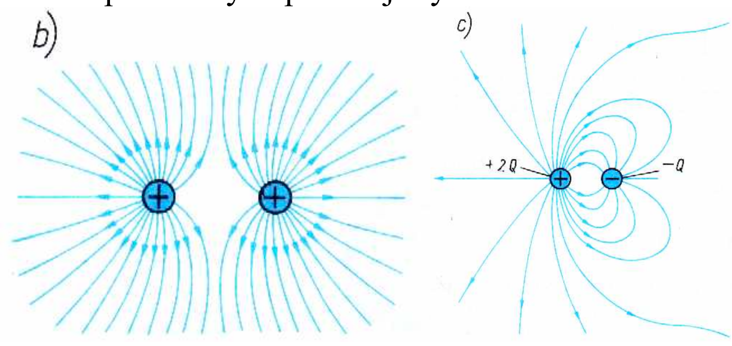
Aby policzyć sumaryczne pole pochodzące od wszystkich elementów pierścienia obliczymy całkę po krzywej zamkniętej jaką stanowi pierścień

$$E = E_x = \oint k_0 \frac{\lambda x_0}{r^3} dl = k_0 \frac{\lambda x_0}{r^3} \oint dl = k_0 \frac{\lambda x_0}{r^3} (2\pi R) = k_0 Q \frac{x_0}{\left(x_0^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

gdzie: $r = (x_0^2 + R^2)^{1/2}$, $Q = 2\pi R\lambda$.

Z analizy otrzymanego wyniku: *dla* $x_0=0$ $E = 0$, a dla $x_0>>R$ natężenie pola $E=k_0Q/x_0^2$ będzie takie samo jak dla ładunku punktowego.

Kierunek pola elektrycznego $\vec{E}$ w przestrzeni można przedstawić za pomocą linii nazywanych liniami sił lub liniami strumienia elektrycznego. Linie pola elektrycznego oprócz kierunku pokazują także natężenie pola, ponieważ kreśli się je w taki sposób, by liczba linii na jednostkę powierzchni była liczbowo równa natężeniu pola. Przykład linii pola wokół ładunków punktowych pokazuje rys 1.4.



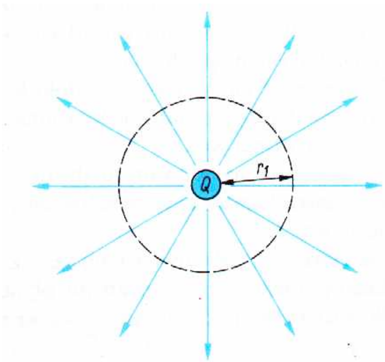
Rys.1.4 Obrazy linii sił pola elektrycznego dla ładunków punktowych

1.4. Prawo Gaussa

W oparciu o linie sił pola można zdefiniować pojęcie strumienia elektrycznego będącego iloczynem skalarnym wektora natężenia pola $\vec{E}$ równego co do wartości liczbie linii sił, przez wektor $\vec{A}$ prostopadły do pola powierzchni przez którą przenikają linie sił i równy temu polu.
W ogólnym przypadku dla pól niejednorodnych strumień możemy obliczyć całkując natężenie pola $\vec{E}$ po całej interesującej nas powierzchni A.

$$\Phi = \int_s \vec{E}\ d\vec{A} \qquad 1.4$$

Rozpatrzmy strumień elektryczny pochodzący od ładunku punktowego Q i przechodzący przez powierzchnie kulistą o promieniu r otaczającą ładunek (rys.1.5).



Rys.1.5.Linie sił pola ładunku punktowego przecinające powierzchnię kuli o promieniu r

Ze względu na symetrię układu oraz równoległość wektora natężenia pola i wektora prostopadłego do powierzchni kuli strumień możemy obliczyć mnożąc wartość natężenia pola na powierzchni otaczającej kuli przez powierzchnię tej kuli. W rezultacie otrzymamy:

$$\Phi = E \cdot \left(4\pi r_1^2\right) = \left(k_0 \frac{Q}{r_1^2}\right) \cdot \left(4\pi r_1^2\right) = 4\pi k_0 Q \qquad 1.5$$

Otrzymana wartość strumienia nie zależy od r_1. Całkowita liczba linii sił wychodzących z ładunku punktowego Q jest równa $4\pi\, k_0 Q$, a linie te ciągną się aż do nieskończoności. Można wykazać że liczba linii sił pozostaje równa $\phi = 4\pi\, k_0 Q$ nawet wtedy, gdy zamknięta powierzchnia ma dowolny kształt całkowicie otaczający ładunek Q. Taką całkowicie zamkniętą powierzchnię nazywamy powierzchnią Gaussa. Można udowodnić że w przypadku kiedy powierzchnia Gaussa obejmuje nie jeden a wiele ładunków punktowych całkowity strumień przez tę powierzchnię będzie równy

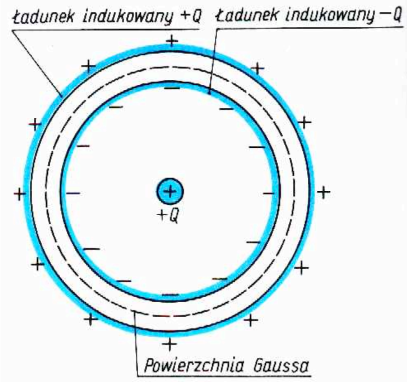
$$\Phi = \oint \vec{E}\ d\vec{A} = 4\pi k_0 Q_{wewn.} \qquad 1.6$$

Gdzie $Q_{wewn.}$ jest wypadkowym ładunkiem zawartym wewnątrz zamkniętej powierzchni.

Zależność powyższa nosi nazwę prawa Gaussa. Prawo to mówi, że całkowita liczba linii sił pola wychodzących z naładowanego ciała jest równa wypadkowemu ładunkowi tego ciała pomnożonemu przez czynnik $4\pi\, k_0$. Jeżeli Q jest ujemne, to linie wchodzą do ciała. Linie mogą zaczynać się lub kończyć jedynie na ładunkach, a wszędzie indziej są ciągłe. Prawo Gaussa pozostaje w mocy niezależnie od tego, czy na zewnątrz zamkniętej powierzchni znajdują się ładunki, czy też nie.

1.5. Indukcja elektryczna

Większość ciał stałych można podzielić dwa rodzaje: przewodniki i izolatory. Jeżeli naładowanym elektrycznie ciałem jest izolator, to nadmiarowy ładunek może być rozmieszczony na powierzchni lub wewnątrz izolatora i będzie się tam utrzymywał. Natomiast przewodniki zawierają dużą liczbę swobodnych elektronów, które nie są związane z atomami sieci krystalicznej. Z tego względu pole elektryczne wewnątrz przewodnika może istnieć jedynie do czasu, kiedy swobodne elektrony przemieszczając się wytworzą równe co do wielkości, lecz przeciwnie skierowane pole, kompensujące pole zewnętrzne. Dlatego też ładunek wprowadzony do przewodnika zawsze musi się zbierać na jego powierzchni, nawet wtedy, gdy został wprowadzony do wydrążonego wnętrza przewodnika (rys.1.6).



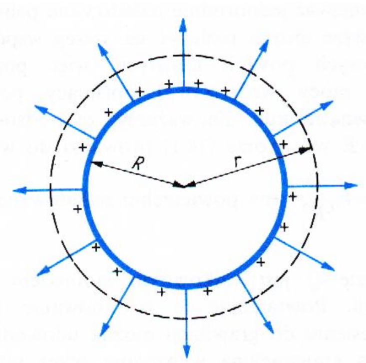
Rys1.6. Ładunek Q umieszczony wewnątrz wydrążonego przewodnika kulistego. Na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni przewodnika pojawiają się ładunki indukowane.

Rysunek 1.6 jest przykładem zjawiska indukcji elektrycznej. Jeżeli obojętne elektrycznie ciało znajdzie się w obszarze działania pola elektrycznego, zawsze na jego powierzchni zgromadzą się indukowane ładunki. W przewodniku ładunki te zrównoważą ładunek znajdujący się w pobliżu przewodnika tak, aby pole elektryczne wewnątrz było równe zero. W doskonałych izolatorach także będą indukowane ładunki, lecz nigdy nie zrównoważą one całkowicie pola wewnątrz ciała. Taki izolator nazywamy dielektrykiem.

1.6. Rozkłady ładunków

W urządzeniach technicznych najczęściej spotykamy się nie z pojedynczymi ładunkami punktowymi, lecz z naładowanymi powierzchniami różnych kształtów. W takich przypadkach ważna jest umiejętność wyznaczania pól elektrycznych dla podstawowych rozkładów ładunków: kulistego, walcowego i płaskiego. Do obliczania natężenia pola elektrycznego wykorzystamy prawo Gaussa.

Rozkład kulisty



Rys.1.7. Jednorodnie naładowana powierzchnia kulista

Rozpatrujemy naładowaną powierzchnie kulistą o całkowitym ładunku równym Q. Obliczamy pole na zewnątrz kuli w odległości r od jej środka. Ze względu na symetrię linie pola rozchodzą się radialnie ze środka z jednakową gęstością.

Jako powierzchnię całkowania przyjmujemy powierzchnię kuli o promieniu *r*. W dowolnym punkcie kuli możemy napisać $\vec{E}\, d\vec{A} = E\, dA$ co po scałkowaniu daje:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = E \oint dA = E\left(4\pi r^2\right)$$

Zgodnie z prawem Gaussa całka ta jest równa

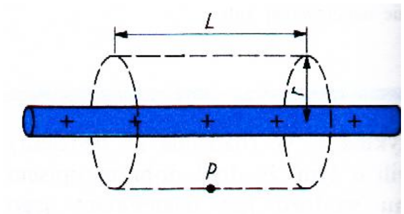
$$E\,(4\pi r^2) = 4\pi k_0 Q,$$

skąd po przekształceniu otrzymamy

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2} \qquad dla\ r \rangle R. \qquad 1.7$$

Analogiczne rozumowanie dla pola wewnątrz powierzchni kulistej prowadzi do wyniku $E = 0$, ponieważ powierzchnia całkowania obejmuje ładunek $Q = 0$.

Rozkład liniowy



Rys.1.8 Jednorodnie naładowany pręt

Poszukujemy pola w odległości *r* od naładowanego pręta o długości znaczne większej od *r*. Niech λ będzie liniową gęstością ładunku. Jako powierzchnię Gaussa przyjmujemy powierzchnię walca o długości *L* i promieniu *r*. Z prawa Gaussa otrzymamy:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = 4\pi k_0 (\lambda L)$$

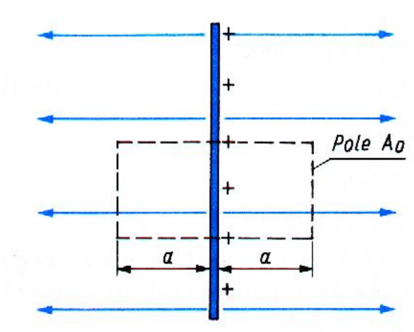
Wykorzystując symetrię układu zauważmy, że wektory $\vec{E}$ *i* $\vec{A}$ tworzą kąty proste na powierzchniach podstawy walca, a na powierzchni bocznej są równoległe. Oznacza to, że całka będzie rożna od zera jedynie na powierzchni bocznej walca i wyniesie:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = E(2\pi r L)$$

Przyrównując oba wyrażenia otrzymamy:

$$E = \frac{2k_0\lambda}{r} \qquad 1.8$$

Rozkład płaski

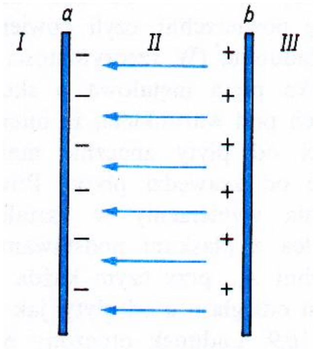


Rys. 1.9. Jednorodnie naładowana nieskończona płyta

Analogiczne rozważania jak przy rozkładzie liniowym prowadzą do wyniku, że pole wytwarzane przez jednorodnie naładowaną nieskończoną płytę wynosi

$$E = 2\pi k_0 \sigma, \qquad 1.9$$

gdzie σ jest gęstością powierzchniową ładunku zgromadzonego na płycie.
Warto zauważyć, że wartość pola nie zależy od odległości od płyty.
Jeżeli dwie płaskie równolegle płyty naładowane ładunkami przeciwnego znaku umieścimy obok siebie, to otrzymamy kondensator płaski (rys 1.10).



Rys.1.10. Pole między dwiema płytami naładowanymi ładunkami jednakowej wielkości i przeciwnych znaków

Sumując pola wytwarzane przez obie płyty w poszczególnych obszarach oznaczonych na rysunku cyframi I do III stwierdzimy, że pole różne od zera istnieje jedynie w obszarze między płytami i wynosi

$$E = 4\pi k_0 \sigma. \qquad 1.10$$

1.7. Potencjał elektryczny

Każdemu ładunkowi q znajdującemu się w polu elektrycznym $\vec{E}$ możemy przypisać energię opisaną wzorem:

$$U(r) = -q\int_{\infty}^{r} \vec{E}\, d\vec{s} \qquad 1.11$$

W przypadku, gdy źródłem pola jest ładunek punktowy Q, energia ta będzie równa pracy wykonanej przeciw sile elektrycznej podczas przenoszenia ładunku q z nieskończoności do punktu odległego o r od ładunku punktowego. Zależność 1.11 przyjmie wówczas postać:

$$U(r) = -q\int_{\infty}^{r} k_0 \frac{Q}{r^2} dr = -qQk_0 \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = k_0 \frac{qQ}{r} \qquad 1.12$$

Jeżeli energię opisaną wzorem 1.11 odniesiemy do ładunku jednostkowego, to zdefiniujemy parametr pola elektrycznego zwany potencjałem elektrycznym.

$$V = \frac{U}{q} \qquad 1.13$$

Jednostką potencjału elektrycznego jest dżul na kulomb, znany pod nazwą wolt.
W przypadku ładunku punktowego potencjał będzie wynosił:

$$V = \frac{k_0 Q}{r} \qquad 1.14$$

Fizycznie potencjał oznacza pracę potrzebną do przeniesienia jednostkowego ładunku z nieskończoności do punktu odległego o r od ładunku punktowego Q.

Potencjał elektryczny jest energią potencjalną na jednostkowy ładunek, tak jak natężenie pola elektrycznego jest siłą na jednostkowy ładunek.

W praktyce najczęściej używamy wielkości zwanej napięciem, będącej różnicą potencjałów między dwoma punktami.

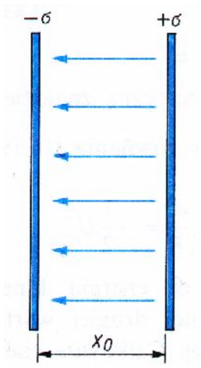
$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{s} \qquad 1.15$$

W inżynierii materiałowej do opisu zjawisk w skali atomowej często używana jest jednostka energii zwana elektronowoltem. Jest to ilość energii jaką uzyskuje elektron podczas przyspieszania w polu elektrycznym o różnicy potencjałów równej jeden volt.

1 eV = 1,6 *10^{-19} J

1.8. Pojemność elektryczna

Obliczmy różnicę potencjałów między dwiema równoległymi płytami o polu A znajdującymi się w odległości x_0 od siebie (rys 1.11). Ładunki na płytach są równe $+Q$ i $-Q$, co odpowiada gęstości powierzchniowej $\sigma = Q/A$ i $-Q/A$.



Rys.1.11. Dwie równoległe płyty z ładunkami przeciwnych znaków

Natężenie pola między płytami obliczymy ze wzoru 1.10.

$$E = -4\pi k_0 \sigma.$$

Różnica potencjałów w oparciu o zależność 1.15 dla jednorodnego pola:

$$\Delta V = -E\, x_0$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$\Delta V = 4\pi k_0 \sigma x_0 = \frac{4\pi k_0 x_0}{A} Q \qquad 1.16$$

Taki układ dwóch położonych blisko siebie przewodników (zwanych okładkami) nazywamy kondensatorem płaskim. Charakterystyczną cechą kondensatora jest zdolność do gromadzenia ładunku określona parametrem zwanym pojemnością.
Pojemność C jest zdefiniowana jako stosunek nagromadzonego ładunku Q do różnicy potencjałów ΔV.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad 1.17$$

Jednostką pojemności jest farad 1F = 1C / 1V (kulomb na wolt). W praktyce używane są jednostki mniejsze takie jak μF = 10^{-6}F lub nF = 10^{-9}F.

Podstawiając zależność 1.16 do 1.17 otrzymamy wzór na pojemność kondensatora płaskiego:

$$C = \frac{Q}{\dfrac{4\pi k_0 x_0 Q}{A}} = \frac{A}{4\pi k_0 x_0} \qquad 1.18$$

Przestrzeń między okładkami kondensatora wypełnia się często dielektrykiem. Pojemność *C'* takiego kondensatora zmienia się w stosunku określonym stałą *ε*.

$$\varepsilon = \frac{C'}{C} \qquad 1.19$$

gdzie *C* jest pojemnością kondensatora bez dielektryka między okładkami. Stała *ε* jest cechą charakterystyczną materiału dielektrycznego i nazywa się stałą dielektryczną.

Ładowanie kondensatora polega na przenoszeniu ładunku z jednej okładki na drugą. Pracę potrzebną na przeniesienie ładunku *dq* z ujemnej okładki na dodatnią można opisać zależnością:

$$dU = V\,dq \qquad 1.20$$

Całkowitą pracę potrzebną do naładowania kondensatora, czyli energię zgromadzoną w kondensatorze możemy obliczyć całkując zależność 1.20.

$$U = \int_0^Q V\;dq = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad 1.21$$

Przekształcając zależność 1.21 otrzymamy bardziej praktyczną postać wzoru na energię zgromadzoną w kondensatorze:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C\frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2}CV^2 \qquad 1.22$$

W kolejnym przekształceniu wyrazimy energię zgromadzona w kondensatorze płaskim za pomocą natężenia pola elektrycznego wypełniającego przestrzeń między okładkami. W tym celu do zależności 1.22 podstawimy wzór 1.18 na pojemność kondensatora płaskiego oraz zależność $V = E\,x_0$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{A}{4\pi k_0 x_0}\times(E\,x_0)^2 = \frac{E^2}{8\pi k_0}A x_0 \qquad 1.23$$

Dzieląc zależność 1.23 przez $S = Ax_0$, czyli przez objętość przestrzeni miedzy okładkami kondensatora, otrzymamy wzór na gęstość energii pola elektrycznego

$$\frac{U}{S} = \frac{E^2}{8\pi k_0} \qquad 1.24$$

Zależność 1.24 wyprowadziliśmy dla jednorodnego pola zawartego między okładkami kondensatora płaskiego. Można wykazać, że całkowita energia potrzebna do wybudowania dowolnego rozkładu ładunku jest równa całce z $E^2/8\pi\,k_0$ obliczonej dla całej przestrzeni.

Wykład opracowany na podstawie książki:

Orear Jay „Fizyka - tom 1”