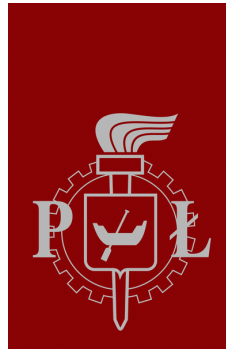




INSTYTUT
INŻYNIERII
MATERIAŁOWEJ

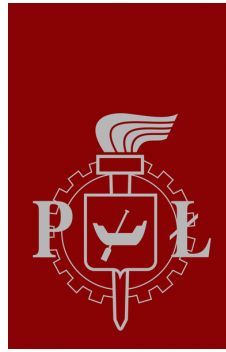


WYDZIAŁ MECHANICZNY
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ



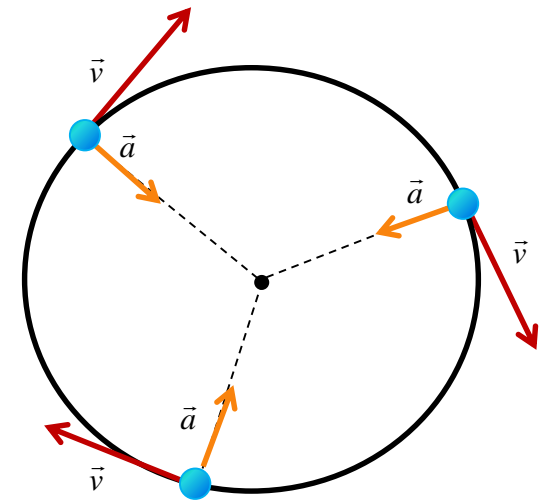
Podstawy Procesów i Konstrukcji Inżynierskich

Ruch obrotowy



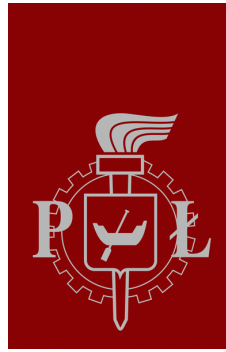
Ruch jednostajny po okręgu

Ruch cząstki nazywamy **ruchem jednostajnym po okręgu** jeśli porusza się ona po okręgu lub kołowym łuku z prędkością o stałej wartości bezwzględnej.

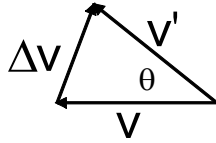
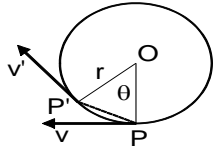


Wektor prędkości jest zawsze styczny do okręgu i skierowany w kierunku ruchu cząstki. Wektor przyspieszenia jest zawsze skierowany wzdłuż promienia okręgu, ku jego środkowi.

Wektory przyspieszenia i prędkości cząstki poruszającej się jednostajnie po okręgu. Obydwa wektory mają stałą długość, lecz ich kierunki zmieniają się w sposób ciągły



Przyspieszenie dośrodkowe



Z podobieństwa trójkątów

oraz

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{l}{r} \longrightarrow \Delta v = \frac{l}{r} v$$

$$l = v \Delta t \quad \text{i} \quad a = \Delta v / \Delta t$$

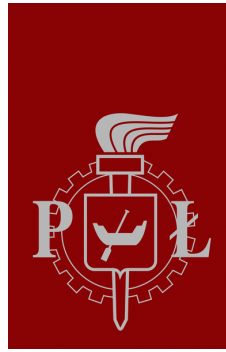
$$a = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu nazywamy **przyspieszeniem dośrodkowym**

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Czas T nazywamy **okresem** obiegu lub po prostu okresem

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$



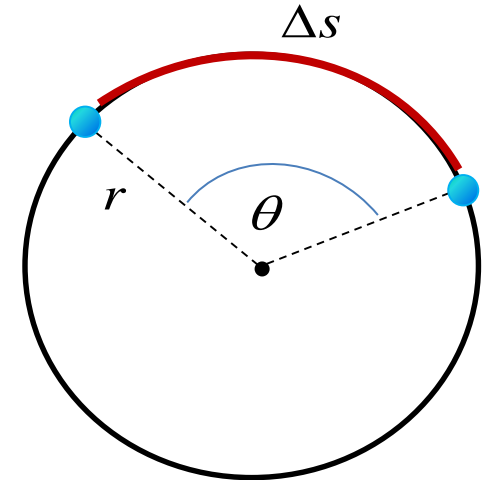
Opis ruchu w układzie biegunowym

$$\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

$\Delta\theta$, θ – kąt (w układzie SI **w radianach**)

Δs – długość drogi przebytej wzdłuż łuku [m]

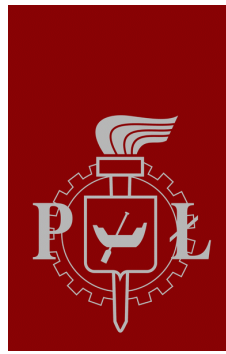
r – promień okręgu którego fragmentem jest zakreślany łuk [m]



Dlaczego używa się jednostki radian?

dla małych kątów obowiązuje zależność:

$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$$



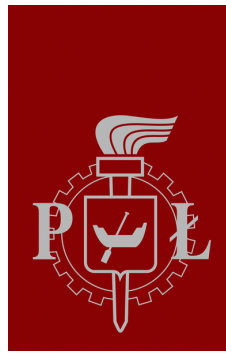
Opis ruchu w układzie biegunowym

Dla małych kątów oznacza:

$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$$

- kąt do 5° jeśli chcemy mieć bardzo dobrą dokładność,
- kąt do 8° jeśli zupełnie niezłą dokładność,
- do 15° dla już dość wyraźnego przybliżenia,
- do 30° - jeśli chcemy mieć tylko zgrubną orientację.

x w °	x w rad	sin x	tg x	dokładność przybliżenia
0	0	0	0	dokładność 100% - owa
1	0,017453293	0,017452406	0,017455065	błąd rzędu 0,01 %
3	0,052359878	0,052335956	0,052407779	błąd rzędu 0,1 %
5	0,087266463	0,087155743	0,087488664	błąd rzędu 0,3 %
8	0,13962634	0,139173101	0,140540835	błąd rzędu 1%
10	0,174532925	0,173648178	0,176326981	błąd rzędu 1,5%
15	0,261799388	0,258819045	0,267949192	błąd rzędu 3,5%
30	0,523598776	0,5	0,577350269	błąd rzędu 15 %
45	0,785398163	0,707106781	1	błąd rzędu 37%
60	1,047197551	0,866025404	1,732050808	błąd rzędu 82%
75	1,308996939	0,965925826	3,732050808	błąd rzędu 211%



Prędkość kątowa a prędkość liniowa

$$s = \theta \cdot r \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$$

Prędkość liniowa v ciała w ruchu po okręgu

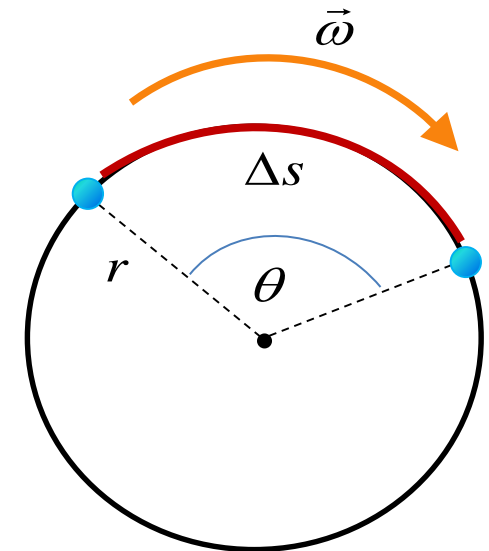
Prędkość kątowa ω ciała w ruchu po okręgu

$$v = \omega \cdot r$$

ω - prędkość kątowa

$\Delta\theta$ - kąt zakreślony przez promień wodzący (w radianach)

Δt - czas w jakim odbywa się ruch, lub jego fragment [s]



Prędkość kątowa jest równa kątowi zakreślonemu podczas ruchu podzielonemu przez czas

Jednostka prędkości kątowej $[\omega] = \text{rad/s} = 1/\text{s}$



Przyspieszenie w ruchu po okręgu

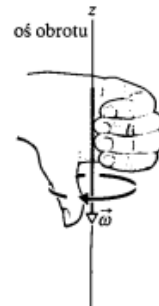
$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$

Przyspieszenie kątowe ε ciała w ruchu po okręgu

Przyspieszenie liniowe a ciała w ruchu po okręgu

$$a = \varepsilon \cdot r$$

a – przyspieszenie liniowe
 $d\omega$ – prędkość kątowa

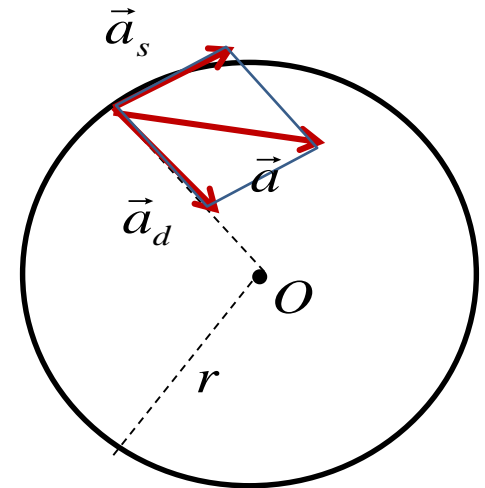


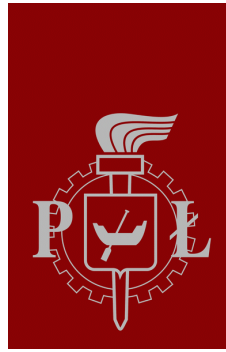
Rozkład wektora przyspieszenia całkowitego \vec{a} na wektor przyspieszenia stycznego \vec{a}_s i dośrodkowego \vec{a}_d

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_d$$

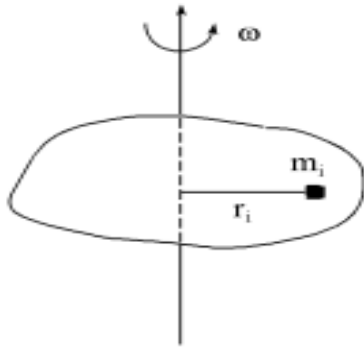
$$a_s = \varepsilon r$$

$$a_d = \omega^2 r$$





Energia kinetyczna w ruchu obrotowym



$$E_k = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \dots = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2 \quad v = \omega \cdot r$$

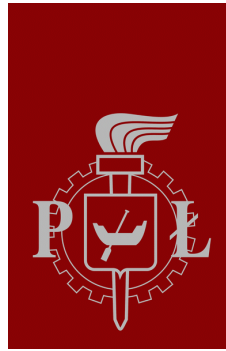
$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega_i r_i)^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

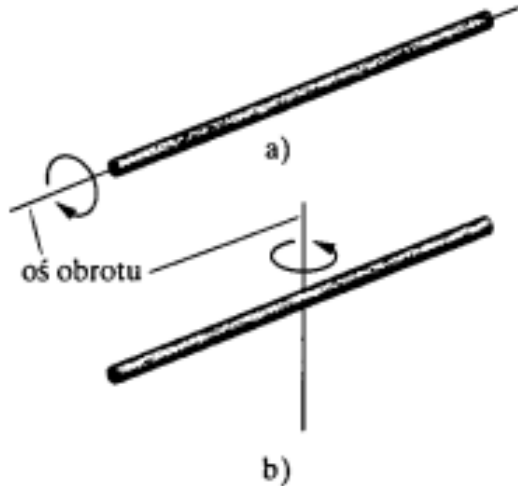
Moment bezwładności informuje nas, jak rozłożona jest masa obracającego się ciała wokół osi jego obrotu. Jest to wielkość stała dla danego ciała sztywnego i określonej osi obrotu.

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}$$

Jednostka: $kg \cdot m^2$

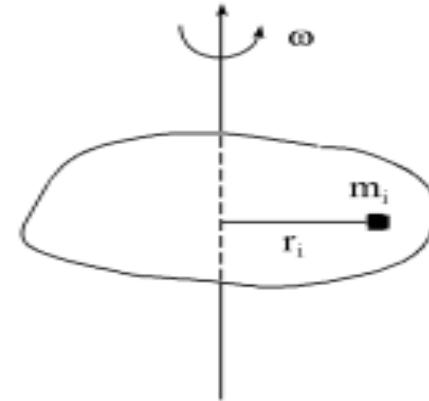


Jak obliczyć moment bezwładności



$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$



Twierdzenie Steinera podaje zależność pomiędzy momentem bezwładności I ciała względem danej osi, a momentem bezwładności $I_{śr.m.}$ tego ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do danej.

$$I = I_{śr.m.} + mh^2$$

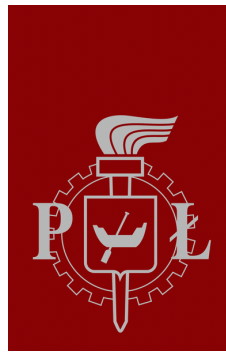
m - masa ciała

h - odległość między osiami

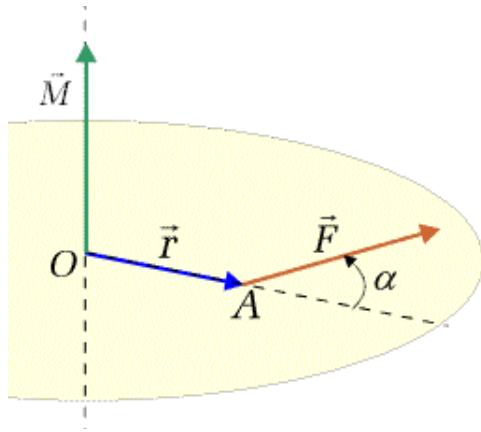


Przykładowe momenty bezwładności

<p>oś obrotu</p> <p>obręcz (względem osi obręczy)</p> $I = mR^2$ <p>a)</p>	<p>oś obrotu</p> <p>pierścień (względem osi pierścienia)</p> $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ <p>b)</p>	<p>oś obrotu</p> <p>walec pełny (względem osi walca)</p> $I = \frac{1}{2}mR^2$ <p>c)</p>
<p>oś obrotu</p> <p>walec pełny (względem średnicy przechodzącej przez środek walca)</p> $I = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$ <p>d)</p>	<p>oś obrotu</p> <p>cieńki pręt (względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek)</p> $I = \frac{1}{12}mL^2$ <p>e)</p>	<p>oś obrotu</p> <p>kula pełna (względem dowolnej średnicy)</p> $I = \frac{2}{5}mR^2$ <p>f)</p>
<p>oś obrotu</p> <p>cieńka powłoka sferyczna (względem dowolnej średnicy)</p> $I = \frac{2}{3}mR^2$ <p>g)</p>	<p>oś obrotu</p> <p>obręcz (względem dowolnej średnicy)</p> $I = \frac{1}{2}mR^2$ <p>h)</p>	<p>oś obrotu</p> <p>plyta prostokątna (względem osi prostopadłej do płyty i przechodzącej przez jej środek)</p> $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ <p>i)</p>



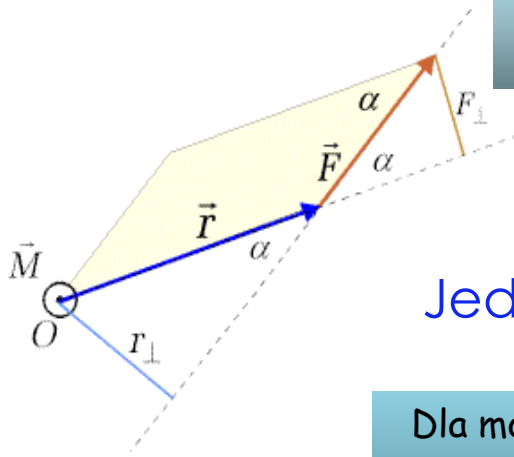
Moment siły



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

Moment siły - miara zdolności siły F do skręcania ciała.



$$M = (r \cdot \sin \alpha) \cdot F = r_{\perp} \cdot F$$

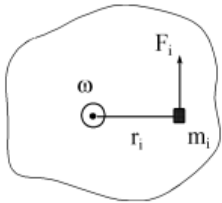
$$M = r \cdot (F \cdot \sin \alpha) = r \cdot F_{\perp}$$

Jednostką momentu siły jest $N \cdot m$

Dla momentów sił spełniona jest zasada superpozycji. Gdy na ciało działa kilka momentów siły, wypadkowy moment siły, oznaczany jako M_{wyp} , jest sumą poszczególnych momentów siły.



Moment siły



$$M_i = F_i \cdot r_i$$

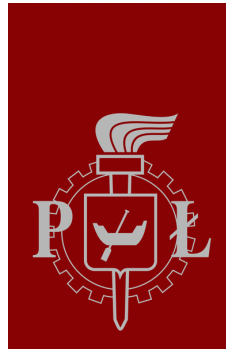
$$M_{wyp} = \sum F_i \cdot r_i = \sum a_i m_i r_i$$

$$a_i = \varepsilon \cdot r_i$$

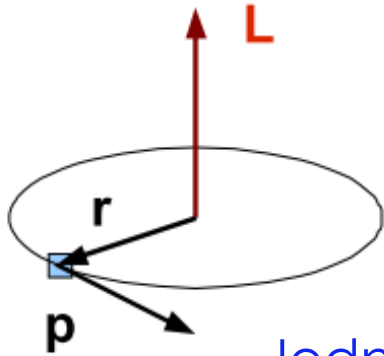
$$M_{wyp} = \sum \varepsilon \cdot m_i \cdot r_i^2 = \varepsilon \sum m_i r_i^2 = \varepsilon \cdot I$$

moment pędu równoległy
do osi obrotu (lub
składowa momentu pędu
równoległa do osi obrotu)

postać analogiczna do II zasady dynamiki
dla ruchu postępowego: $F=ma$



Moment pędu



$$L = r \times p = m \cdot (r \times V)$$

r - wektor położenia punktu materialnego
p - pęd ciała

Jednostką momentu pędu jest

$$\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = \text{J} \cdot \text{s}$$

$$L = r \cdot m \cdot V \cdot \sin \alpha$$

α - kąt między \vec{r} i \vec{p}

$$L = r m v_{\perp}$$

$$L = r_{\perp} m v$$

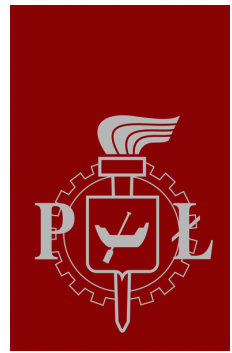


Moment pędu

$$L_{\text{wyp}} = \sum p_i \cdot r_i = \sum m_i v_i r_i \quad v = \omega \cdot r$$

$$L_{\text{wyp}} = \sum m_i \cdot \omega \cdot r_i \cdot r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega \cdot I$$

Moment bezwładności spełnia w ruchu obrotowym taką samą rolę jak masa w ruchu postępowym



II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

$$L = r \times p$$

$$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dp}{dt} + \frac{dr}{dt} \times p$$

pochodna momentu pędu względem czasu

$$\frac{dr}{dt} = V \quad = 0 \quad \text{Bo } \vec{V} \parallel \vec{p}$$

II zasada dynamiki Newtona

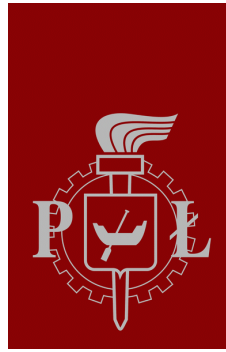
$$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dp}{dt} = F \quad \text{ruch postępowy}$$

ruch obrotowy

$$\frac{dL}{dt} = r \times F \quad r \times F = M$$

$$\frac{dL}{dt} = M$$

Jeśli na ciało działa moment siły M to powoduje on zmianę momentu pędu $dL/dt=M$.



Zasada zachowania momentu pędu

Suma (wektorowa) wszystkich momentów siły działających na cząstkę jest równa szybkości zmiany momentu pędu tej cząstki.

$$\sum_i M_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i L_i \right) = \frac{d\mathbf{L}_{\text{wypadkowy}}}{dt}$$

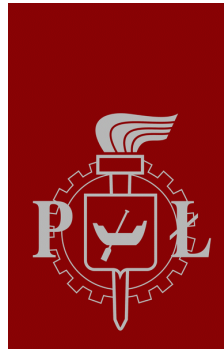
$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{wypadkowy}}}{dt} = 0 \Rightarrow L_{\text{wypadkowy}} = \text{const}$$



INSTYTUT
INŻYNIERII
MATERIAŁOWEJ



WYDZIAŁ MECHANICZNY
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ



III zasada dynamiki ruchu obrotowego

Momenty sił również występują parami

Zasada akcji i reakcji dla momentów sił:

Jeśli ciało A działa na ciało B momentem siły M_{AB} , to równocześnie ciało B działa na ciało A momentem siły M_{BA} , przy czym $M_{AB} = -M_{BA}$

Porównanie ruchu postępowego obrotowego

Ruch prostoliniowy

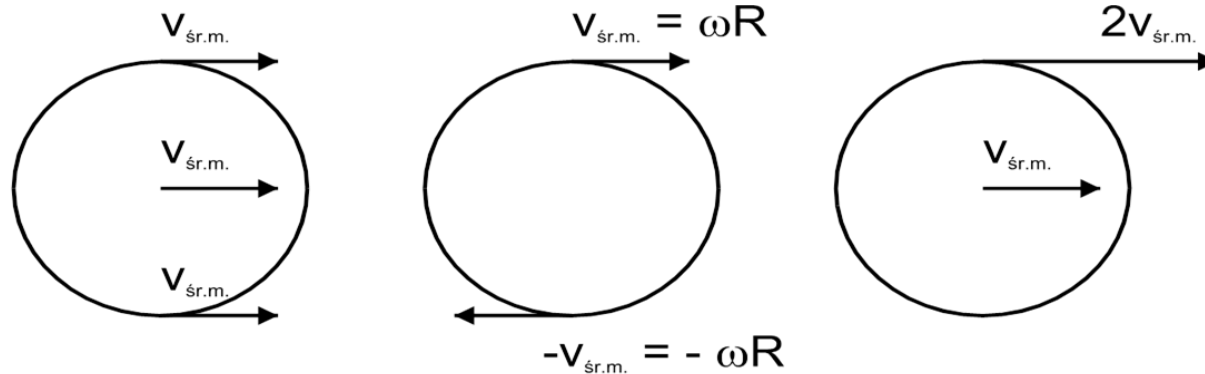
- Przemieszczenie x
- Prędkość $v = \frac{dx}{dt}$
- Przyspieszenie $a = \frac{dv}{dt}$
- Masa m
- Siła $F = ma$
- Energia kinetyczna $\frac{1}{2}mv^2$
- Pęd mv

Ruch obrotowy

- Przemieszczenie kątowe θ
- Prędkość kątowa $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- Przyspieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
- Moment bezwładności I
- Moment siły $M = I\varepsilon$
- Energia kinetyczna $\frac{1}{2}I\omega^2$
- Moment pędu $I\omega$



Ruch postępowo - obrotowy



Ruch postępowy

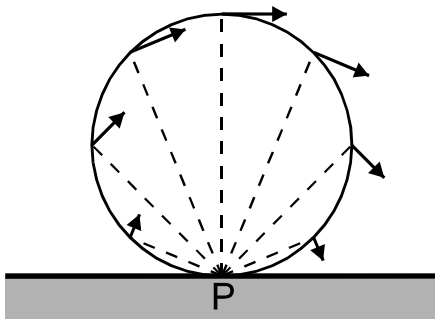
Ruch obrotowy

**Ruch postępowo -
obrotowy**

wszystkie punkty poruszają się z takimi samymi prędkościami

przeciwnie położone punkty poruszają się z przeciwnymi prędkościami, a środek jest nieruchomy

Złożenie dwóch ruchów

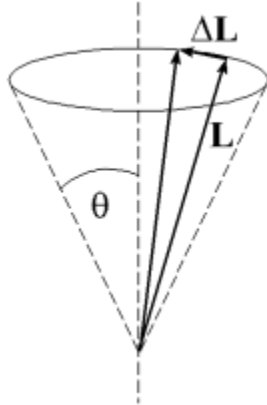


Podstawa walca (punkt P) w każdej chwili spoczywa. Prędkość liniowa każdego innego punktu jest w każdej chwili prostopadła do linii łączącej ten punkt z podstawą P i proporcjonalna do odległości tego punktu od P . Oznacza to, że walec obraca się wokół punktu P .



Ruch precesyjny (bąk)

Punkt podparcia bąka znajduje się w początku inercyjnego układu odniesienia. Oś wirującego bąka porusza się dookoła osi pionowej, zakreślając powierzchnię stożka. Taki ruch nazywamy **precesją**.



$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{M}{L \sin \theta}$$

$$\omega_p = \frac{mgr}{L}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{M \Delta t}{L \sin \theta}$$

$$M = mgr \sin \theta$$

$$M = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}$$

