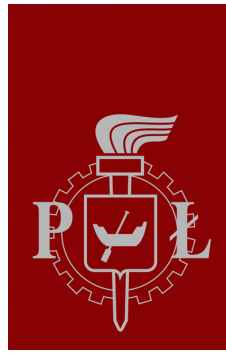




INSTYTUT
INŻYNIERII
MATERIAŁOWEJ



WYDZIAŁ MECHANICZNY
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ



Podstawy Procesów i Konstrukcji Inżynierskich

Kinematyka

Prowadzący:

Kierunek Wyróżniony przez PKA



INZYNIERIAMATERIALOWAPL

Mechanika



Kinematyka



Bada ruch ciał nie wnikając w przyczyny warunkujące ten ruch

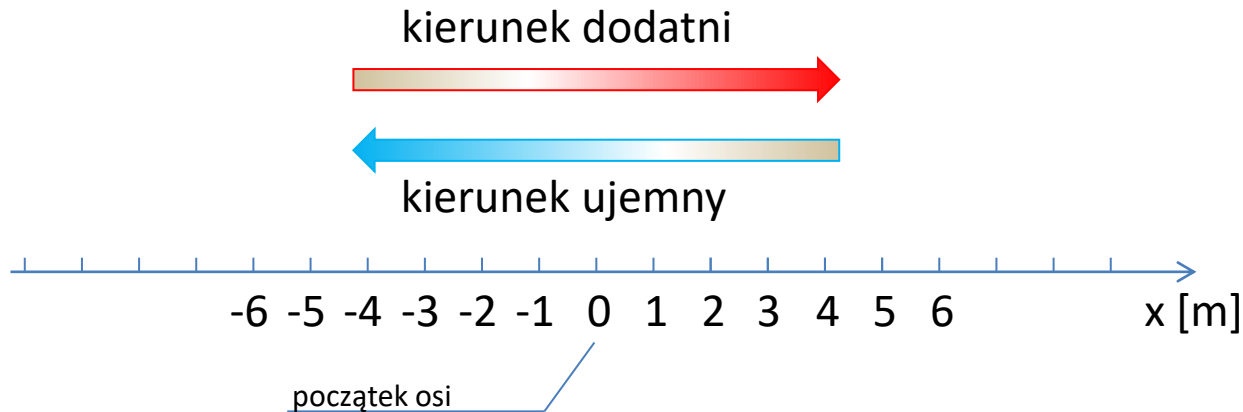
Dynamika



Bada ruch w związku z jego przyczynami (wzajemne oddziaływanie ciał) od których zależy charakter ruchu.



Położenie i przemieszczenie



Kierunkiem dodatnim osi jest kierunek, w którym współrzędne punktów rosną. Kierunek przeciwny nazywamy kierunkiem ujemnym.

Przemieszczenie

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Δ – delta oznacza zmianę jakiejś wielkości i jest różnicą wartości końcowej i początkowej tej wielkości



Położenie i przemieszczenie

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

ZADANIE

Mając trzy pary położeń początkowych i końcowych proszę podać, które z nich dają ujemne przemieszczenie:

a) – 3m, +5m

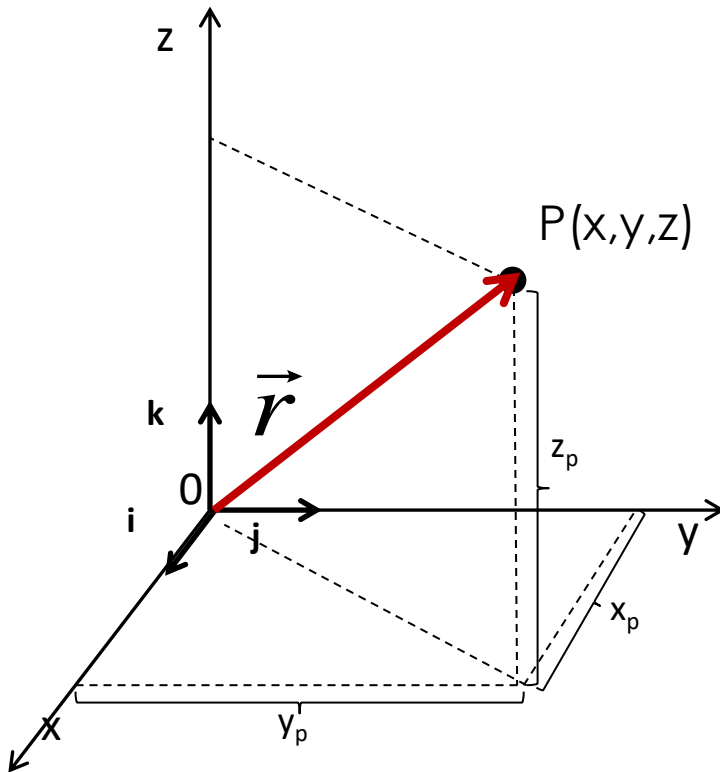
b) -3m, -7m

c) 7m, -3m

Całkowita droga, przebyta w trakcie ruchu nie ma znaczenia dla wartości przemieszczenia – liczy się tylko położenie początkowe i końcowe.



Wektor położenia



XYZ – układ odniesienia

$\vec{r} = O\vec{P}$ – wektor położenia

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Długość wektora położenia w kartezjańskim układzie współrzędnych

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\vec{r}(t)$ wektor położenia zależy od czasu



INSTYTUT
INŻYNIERII
MATERIAŁOWEJ



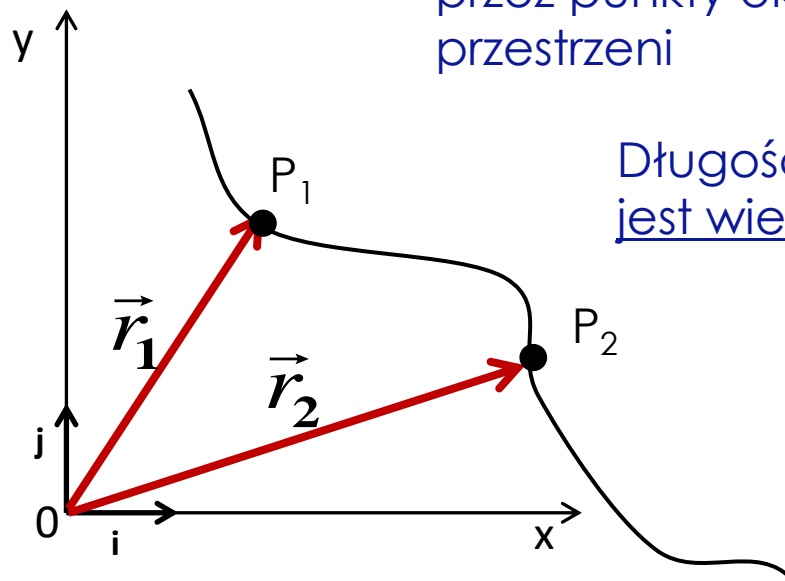
WYDZIAŁ MECHANICZNY
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ



INZYNIERIAMATERIALOWAPL

Tor ruchu, droga

Tor ruchu ciała – krzywa lub prosta utworzona przez punkty określające kolejne położenia ciała w przestrzeni

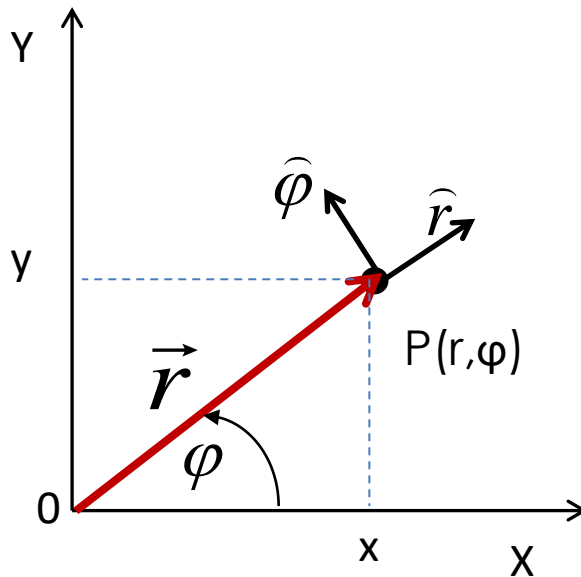


Długością toru s nazywamy **drogę**. Droga jest wielkością skalarną.

Gdy tor jest linią prostą, mówimy, że ciało porusza się *ruchem prostoliniowym*, gdy zaś krzywą – ruch jest *ruchem krzywoliniowym*



Wektor położenia we współrzędnych biegunowych



Oś OX pokrywająca się z osią biegunową

$\vec{r} = O\vec{P}$ – wektor położenia

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$|\hat{r}|$ Wersor jednostkowy dla danego położenia wektora $|\hat{r}| = 1$

Wzory przejścia ze współrzędnych kartezjańskich x, y do biegunowych r, φ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

Wzory przejścia ze współrzędnych biegunowych r, φ do kartezjańskich x, y

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

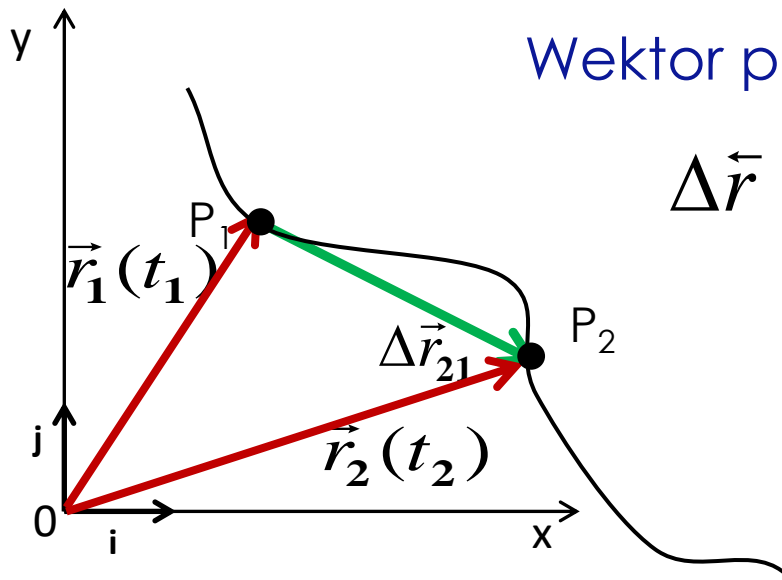


Wektor przemieszczenia

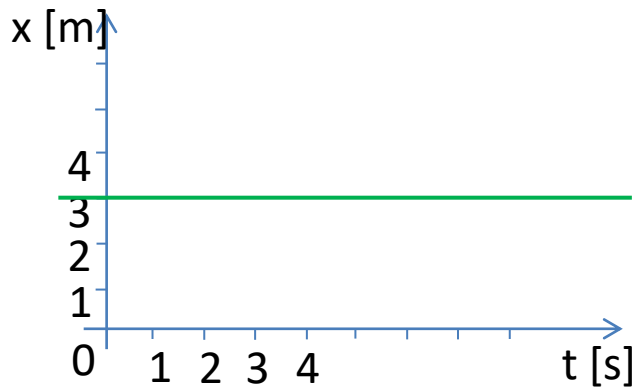
$$\Delta \vec{r} = r_2(t_2) - r_1(t_1)$$

Wektor przemieszczenia zależy od czasu

$\Delta \vec{r}$ jest wielkością wektorową

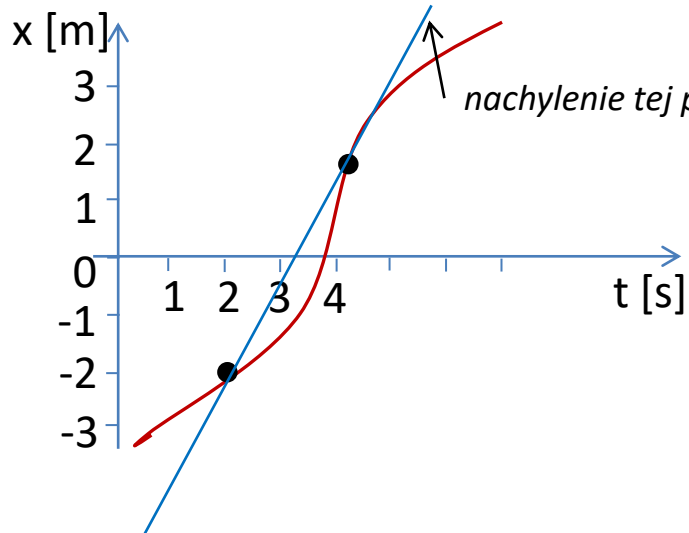


Prędkość średnia



$$\vec{v}_{\acute{s}r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{r_1 - r_2}{t_1 - t_2}$$

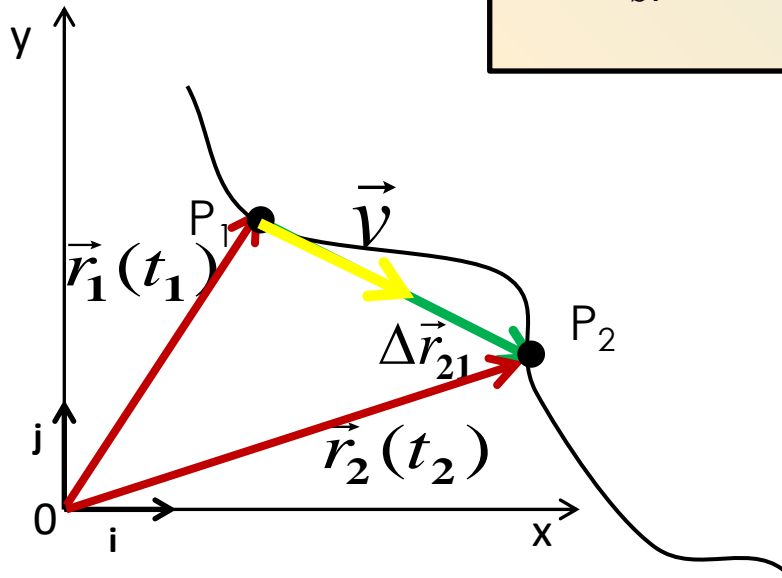
Prędkość średnia to stosunek przemieszczenia do czasu, w którym ciało się przemieściło



Prędkość średnia

wektor prędkości średniej

$$\vec{v}_{\acute{s}r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



$$\vec{v}_{\acute{s}r} = \frac{\Delta \vec{r}_{21}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$



Prędkość a szybkość

Prędkością średnią ciała nazywamy stosunek wektora przemieszczenia ciała do czasu w którym to przemieszczenie nastąpiło.

$$\vec{v}_{\acute{s}r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Wartością prędkości czyli szybkością ciała nazywamy stosunek drogi przebytej do czasu w jakim została przebyta.

$$v = \frac{s}{t}$$

Szybkość średnia to skalarna wielkość fizyczna równa stosunkowi drogi przebytej przez ciało do czasu w jaki została on przebyta.

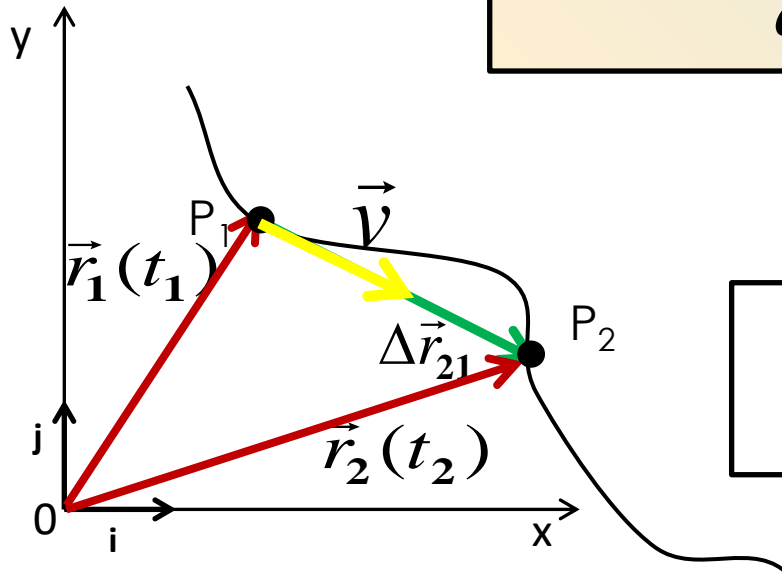
$$v_{\acute{s}r} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Prędkość chwilowa

wektor prędkości chwilowej

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$t_2 \rightarrow t_1$ - czyli $\Delta t \rightarrow 0$

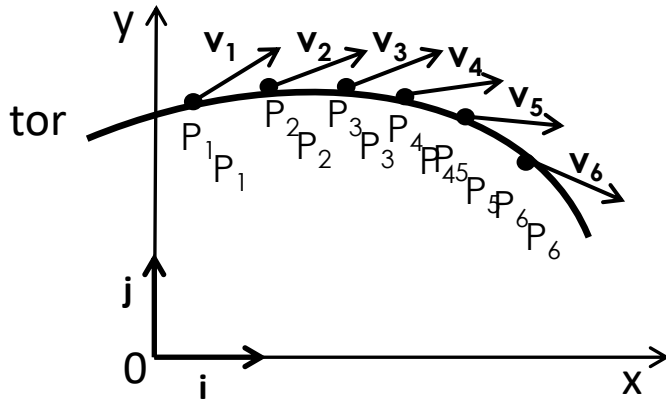
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Prędkość chwilowa to prędkość w nieskończenie małym przedziale czasu

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$



Prędkość chwilowa



Wektor prędkości
chwilowej jest
zawsze styczny do toru!

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$



Prędkość chwilowa jako granica prędkości średniej

$$\vec{v}_{\acute{s}r} = \frac{\Delta \vec{r}_{21}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\acute{s}r}$$



Jednostki prędkości

Podstawową jednostką prędkości w układzie SI jest 1 "metr na sekundę".

$$[v] = \mathbf{1} \frac{m}{s} = \mathbf{1} m \cdot s^{-1}$$

Inne, często używane jednostki to np.:

- km/h (kilometr na godzinę)
- 1 cm/s (centymetr na sekundę)

W transporcie morskim 1 węzeł = 1 kn = 1 mila morska/godz.

Do opisywania ruchu samolotów naddźwiękowych 1 Ma - mach - prędkość równa prędkości dźwięku w powietrzu w temp. 15° - 340 m/s. Stosuje się tę jednostkę do podawania szybkości ruchu samolotów naddźwiękowych.

Ważne przeliczenia jednostek:

$$1 \frac{km}{h} = \frac{1000 m}{3600 s} \approx 0,28 \frac{m}{s}$$

$$1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$$

Przypomnienie:

$$1 km = 1000 m$$

$$1 cm = 0,01 m$$

$$1 mila morska = 1852 m$$

Wnioski:

$$1 kn = 1,852 km/godz.$$

$$1 Ma = 1224 km/h.$$



Droga

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B |d\vec{r}| = \int_{t_A}^{t_B} \frac{|d\vec{r}|}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} |\vec{v}| dt = \int_{t_A}^{t_B} v dt$$

Długość drogi s jest to suma wszystkich odcinków toru, przebytych przez punkt w rozpatrywanym przedziale czasu $\langle t_A, t_B \rangle$

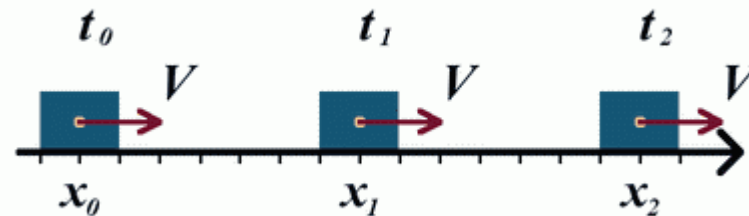
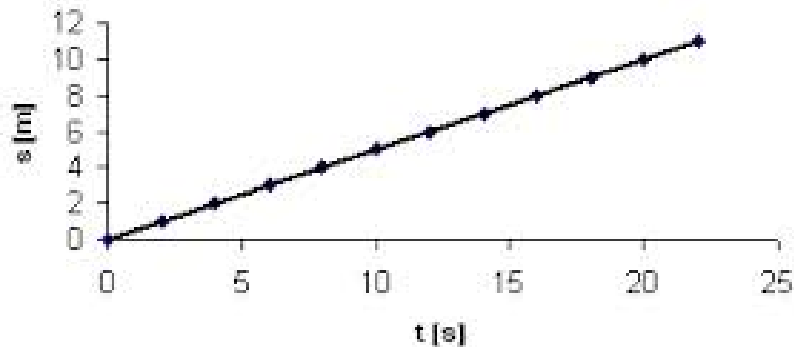


Ruch jednostajny

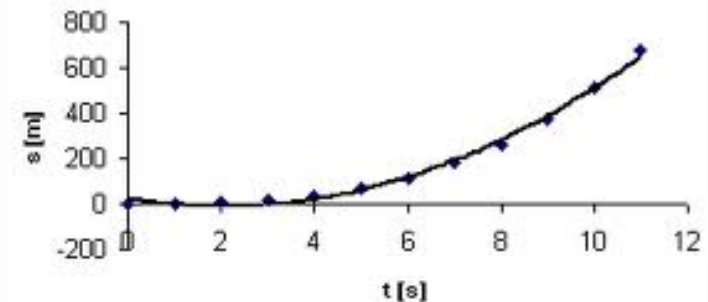
Ruch, w czasie którego wartość liczbowa v prędkości chwilowej punktu nie zmienia się, nazywamy ruchem **jednostajnym**.

$$v = \text{const.}$$

$$\Delta s = v \int_{t_A}^{t_B} dt = v \Delta t$$

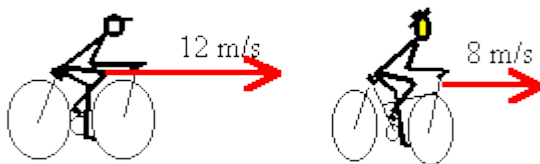


Jeżeli w równych i dowolnie krótkich odstępach czasu punkt przebywa drogi o różnej długości, to wartość liczbowa jego prędkości chwilowej zmienia się z upływem czasu. Taki ruch nazywamy **niejednostajnym**



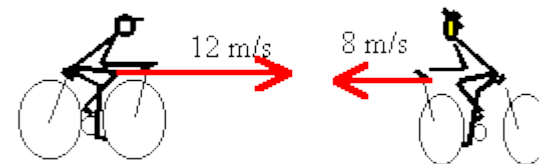
Prędkość względna

Prędkość Jasia względem Stasia jest różnicą ich prędkości względem podłoża.



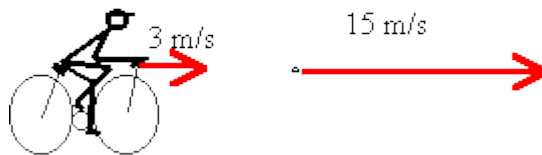
Prędkość względna wynosi 4 m/s

Prędkość Jasia względem Stasia jest teraz sumą ich prędkości względem podłoża.

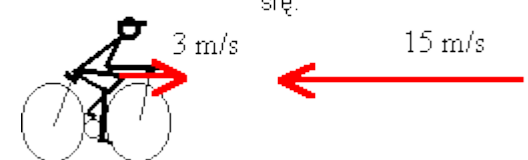


Prędkość względna wynosi 20 m/s

Mucha oddala się od Jasia z prędkością 12 m/s .



W tej sytuacji mucha zbliża się do Jasia z prędkością 18 m/s , ponieważ prędkości muchy i Jasia względem podłoża sumują się.



Przyspieszenie średnie i chwilowe

Przyspieszenie średnie to stosunek przyrostu prędkości do odstępu czasu, w jakim ten przyrost nastąpił.

$$\vec{a}_{\text{śr}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$$[a] = 1 \frac{m}{s^2} = 1m \cdot s^{-2}$$

Przyspieszenie chwilowe to to granica, do której zmierza stosunek prędkości do odstępu czasu, w jakim ten przyrost nastąpił, przy nieskończeniu krótkich odstępach czasu.

$$\vec{a}_{\text{ch}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$



Wektor przyspieszenia

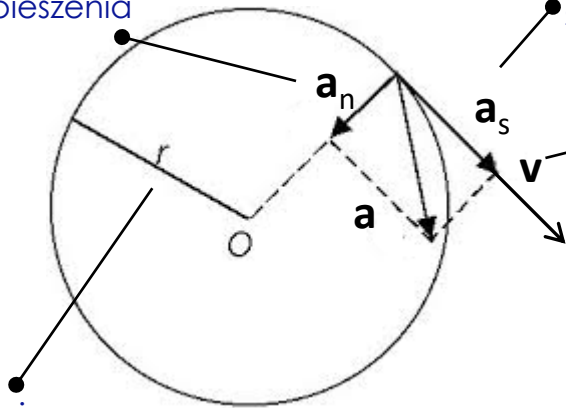
Wektor przyspieszenia jest styczny do toru w ruchu prostoliniowym

tor ruchu cząstki

wektor przyspieszenia normalnego

wektor przyspieszenia stycznego

wektor prędkości cząstki



Promień krzywizny toru (promień okręgu stycznego do toru)

$$\vec{a}_w = \vec{a}_s + \vec{a}_n$$

wektor przyspieszenia wypadkowego

$$|\vec{a}_w| = \sqrt{\vec{a}_s^2 + \vec{a}_n^2}$$

Wartość wektora przyspieszenia wypadkowego



INSTYTUT
INŻYNIERII
MATERIAŁOWEJ

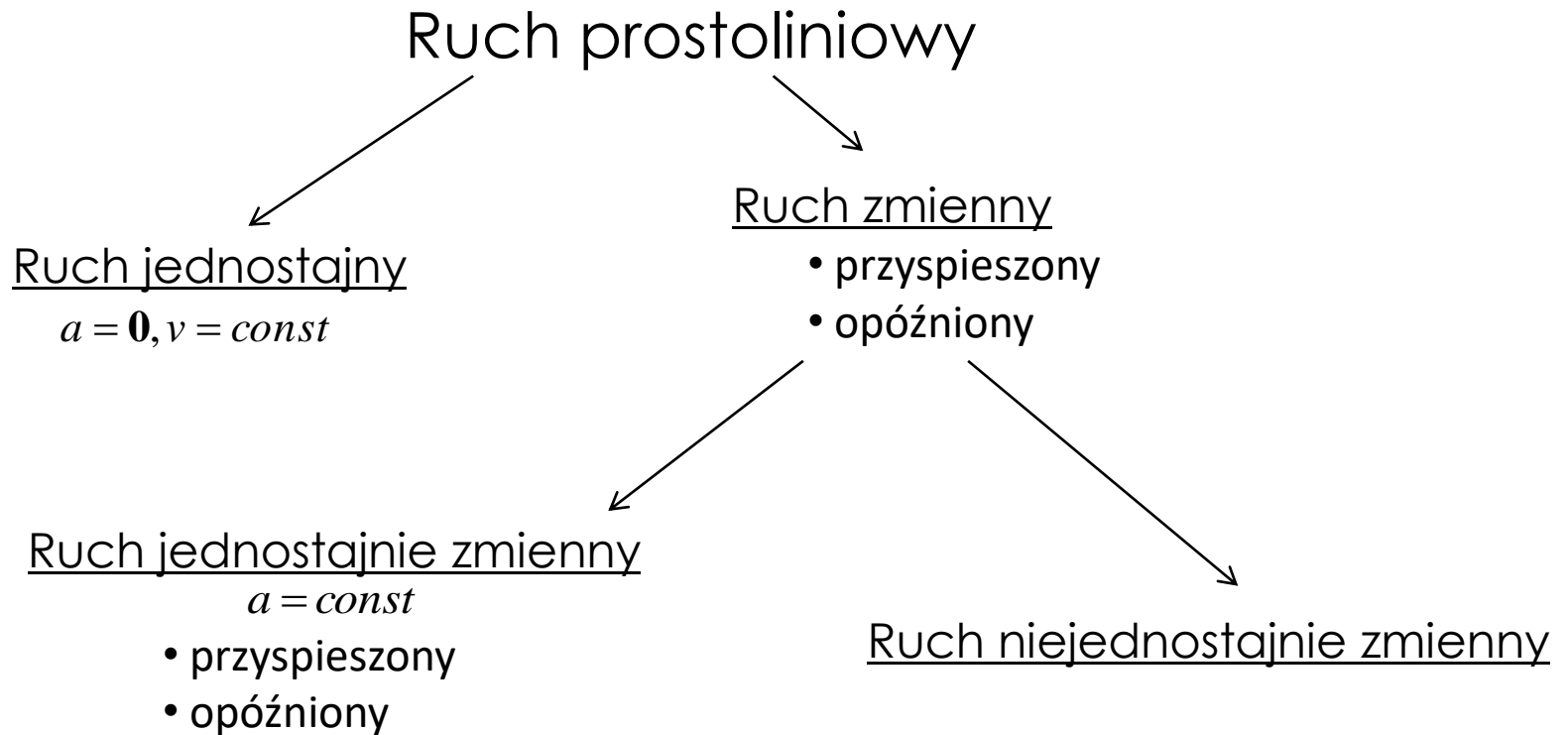


WYDZIAŁ MECHANICZNY
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ



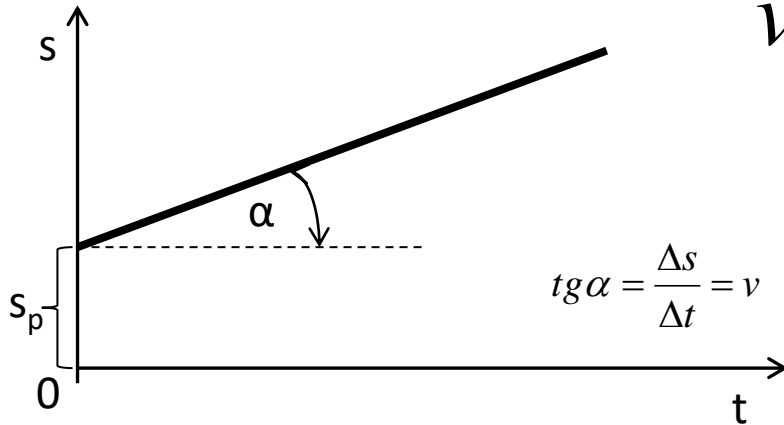
INZYNIERIAMATERIALOWAPL

Ruchy prostoliniowe

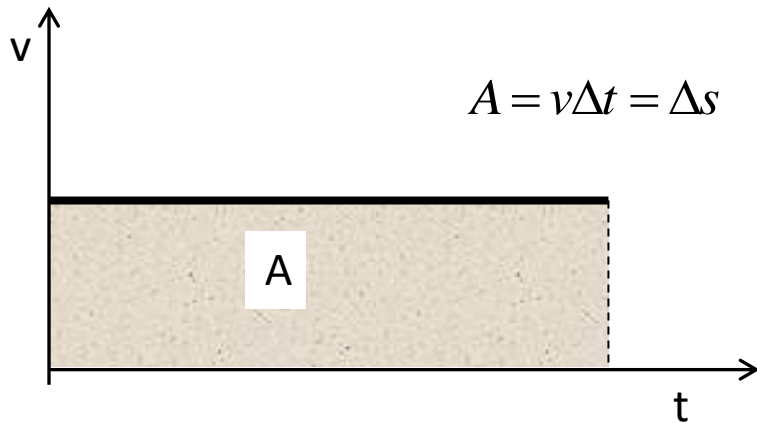


Ruch prostoliniowy jednostajny

$$v = \text{const} \quad a = 0$$



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_k - s_p}{t_k - t_p}$$



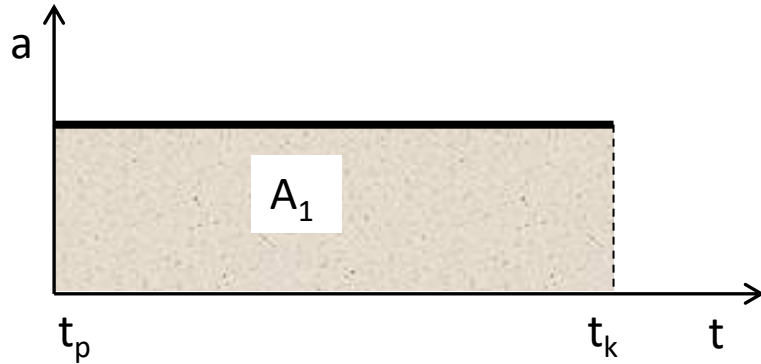
$$s_k = s_p + v\Delta t$$



Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy

$a = \text{const.}$

$$a_{\text{sr}} = \frac{v_k - v_p}{t_k - t_p}$$

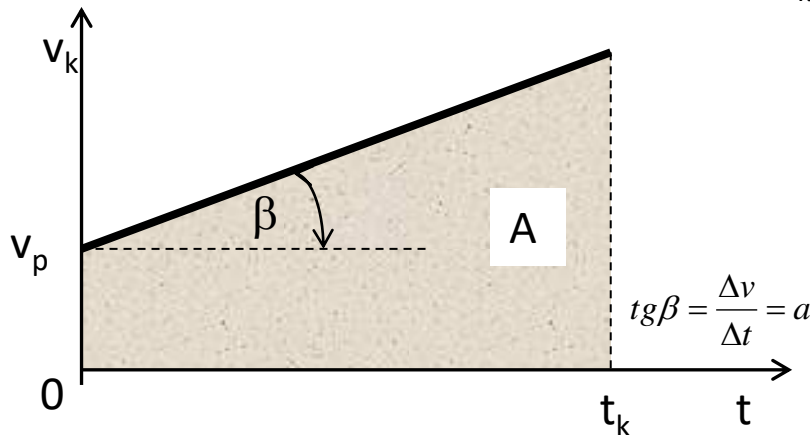


$$v_k = v_p + a\Delta t$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{v_k + v_p}{2}$$

$$v_{\text{sr}} = v_p + \frac{a\Delta t}{2}$$

$$\Delta s = s_k - s_p = v_p \Delta t + \frac{1}{2} (v_k - v_p) \Delta t$$



$$s_k = s_p + v_p \Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$$

$$v_k^2 - v_p^2 = 2a\Delta s$$

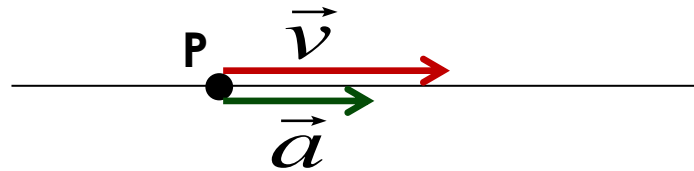


Klasyfikacja ruchów ze względu na przyspieszenie

$$a = \text{const}$$

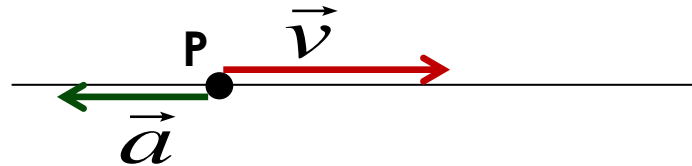
Ruch jednostajnie przyspieszony

przyspieszenie ma
zwrot zgodny z
prędkością



Ruch jednostajnie opóźniony

przyspieszenie ma
zwrot przeciwny do
prędkości



Dyskusja znaków przyspieszenia

W przypadku ruchu jednostajnie zmiennego obowiązują następujące reguły:

1. Gdy **znaki (zwroty)** prędkości początkowej i przyspieszenia **są zgodne**, wtedy ruch ciała jest ruchem przyspieszonym, gdy znaki (zwroty) tych wielkości **są niezgodne**, ruch jest ruchem opóźnionym
2. Gdy prędkość początkowa ciała jest równa zero, mamy do czynienia z ruchem przyspieszonym, niezależnie od znaku (zwrotu) przyspieszenia.

PRZYKŁAD

$$s_k = s_p + v_p \Delta t + \frac{a \Delta t^2}{2}$$

$$s = 3 + 5t + 10t^2$$

$$s = 3 - 10t^2$$

$$s = 3 - 5t - 10t^2$$

$$s = 3 + 10t^2$$

wszystkie równania
opisują ruchy
jednostajnie
przyspieszone

$$s = 3 - 5t + 10t^2$$

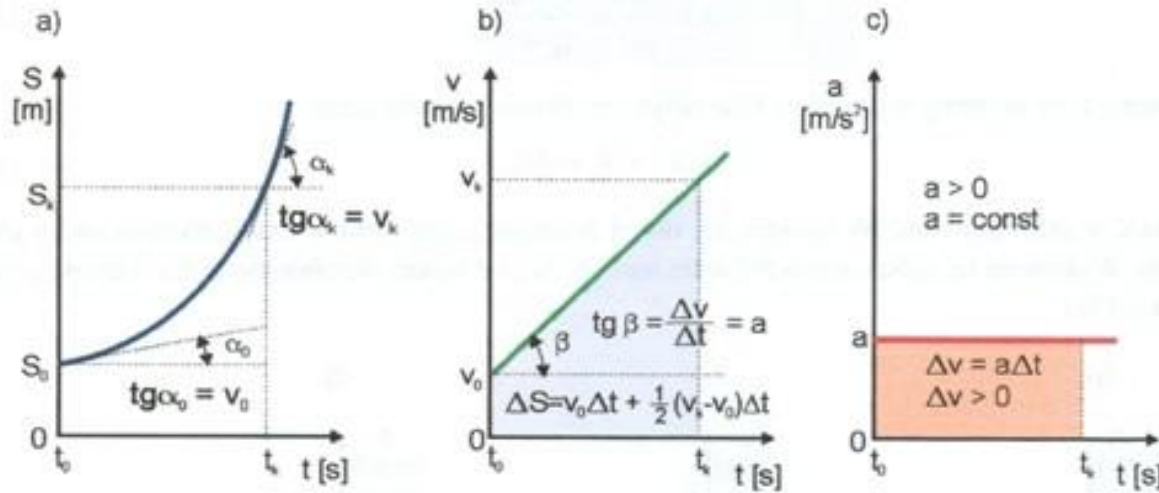
$$s = 3 + 5t - 10t^2$$

równania opisują
ruchy jednostajnie
opóźnione

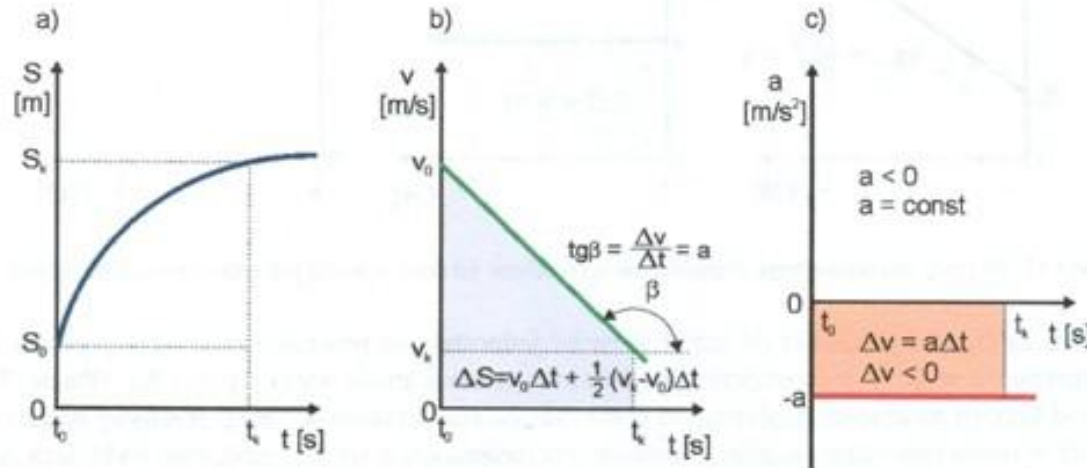


Wykresy drogi, prędkości i przyspieszenia dla ruchu jednostajnie przyspieszonego a) i jednostajnie opóźnionego b)

a)



b)



Klasyfikacja rzutów

Założenia:

- jednorodność pola grawitacyjnego
- zaniedbanie sił oporu powietrza

$$\vec{a} = \vec{g}$$

W zależności od kierunku wektora prędkości początkowej \vec{v}_o wyrzuconego ciała względem wektora \vec{g} rozróżniamy następujące rodzaje rzutów:

1. Rzut pionowy

$$\vec{v}_o \parallel \vec{g}$$

2. Swobodny spadek

$$\vec{v}_o \parallel \vec{g} \quad \vec{v}_o = \mathbf{0}$$

3. Rzut poziomy

$$\vec{v}_o \perp \vec{g}$$

4. Rzut ukośny

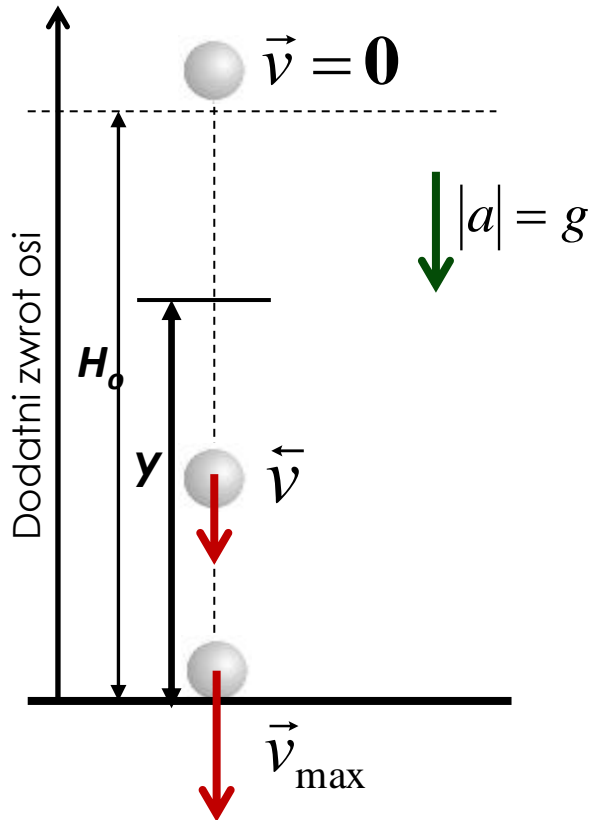
dowolny kąt między wektorami \vec{v}_o i \vec{g}



Spadek swobodny

Warunki początkowe:

Początkowe położenie ciała - na wysokości H_0	Początkowe położenie ciała - na wysokości H_0
Prędkość początkowa o wartości: $v_0 = 0$	W podstawowym wariancie spadku swobodnego ciała jest puszczane bez pchnięcia.
Działa przyspieszenie ziemskie o wartości g	Przyspieszenie jest cały czas skierowane w dół



$$v_k^2 - v_p^2 = 2a\Delta s$$

$$v_{\max} = \sqrt{2gH_0}$$

wartość prędkości końcowej

$$v = -gt$$

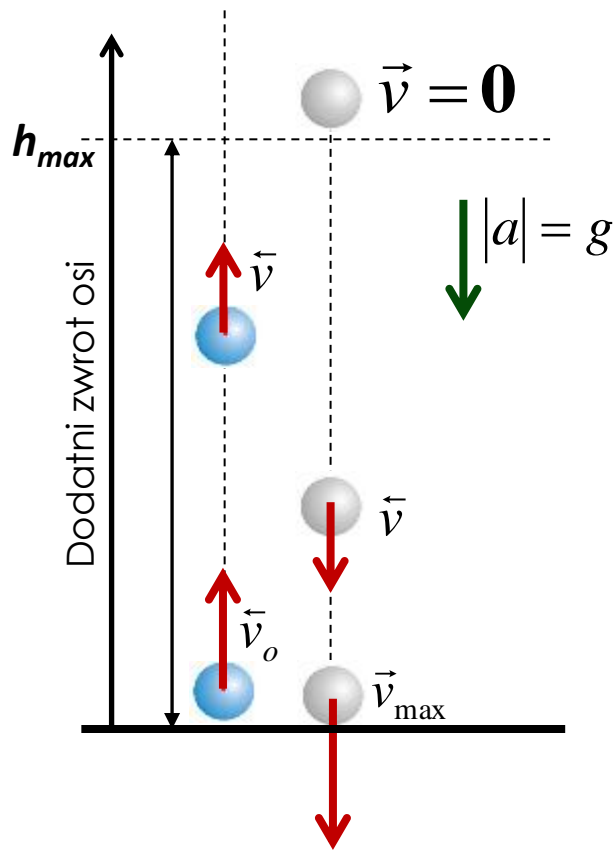
prędkość

$$y = h_0 - \frac{gt^2}{2}$$

położenie ciała w pewnej dowolnej chwili t



Rzut pionowy



Położenie początkowe $h_0 = 0$	Najczęstszy warunek, do wielu rozwiązań można z niego zrezygnować
Prędkość początkowa o wartości: v_0	Prędkość początkowa jest skierowana do góry
Działa przyspieszenie ziemskie o wartości $g = 9,81 \text{ m/s}^2$	Działa przyspieszenie ziemskie o wartości $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$t_w = \frac{v_0}{g}$$

Prędkość po upływie czasu t od wyrzucenia w górę

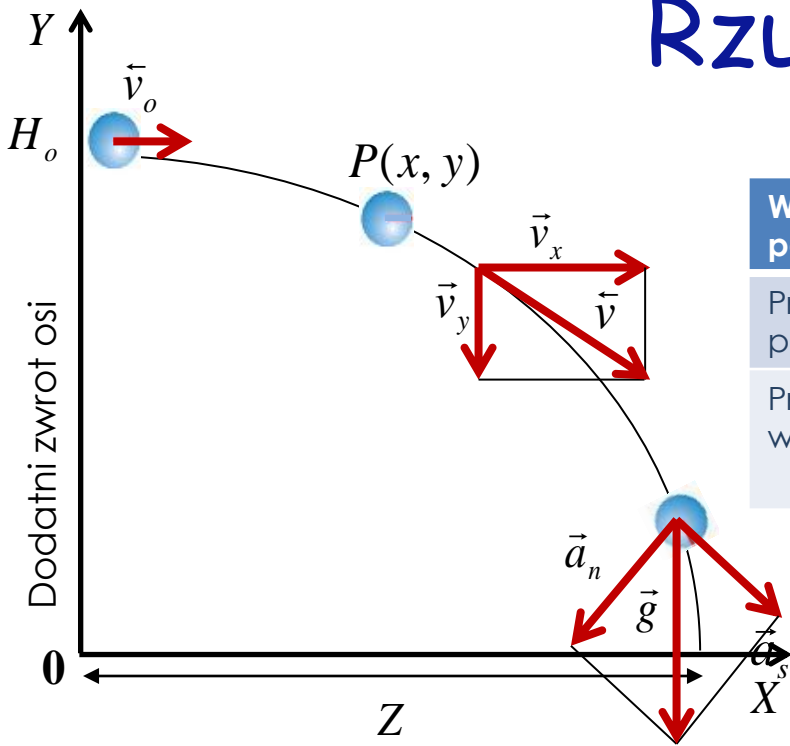
Wysokość na jakiej znajduje się ciało po upływie czasu t od wyrzucenia w górę:

Maksymalna osiągnięta wysokość $v_k^2 - v_p^2 = 2a\Delta s$ $v_k = 0$

Czas wznoszenia do osiągnięcia maksymalnej wysokości



Rzut poziomy



Wysokość początkowa: H_0	Ciało rzucamy z pewnej wysokości
Prędkość początkowa v_0	Prędkość początkowa jest skierowana poziomo . Później prędkość się zakrzywia
Przyspieszenie ma wartość g	Przyspieszenie w tym ruchu jest stałe i cały czas jest skierowane pionowo w dół

$v_x = v_0 = \text{const.}$ Wartość prędkości poziomej

$v_y = -g \cdot t$ Wartość prędkości pionowej

$v = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2}$ Wartość prędkości całkowitej

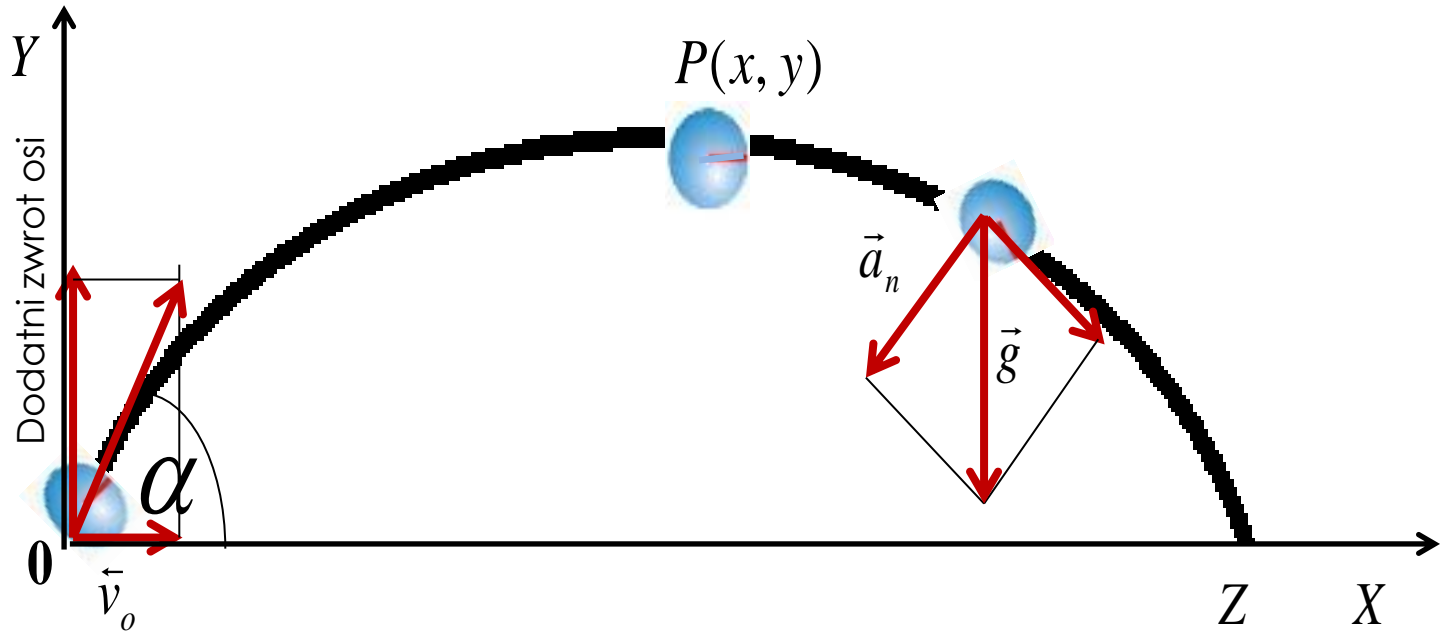
$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH_0}$ Prędkość w momencie uderzenia o ziemię

$h = H_0 - \frac{gt^2}{2}$ Wysokość na jakiej znajduje się ciało po czasie t

$t = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$ Czas jaki upływa do momentu upadku

$Z = v_0 \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$ Zasięg rzutu poziomego (odległość przebyta w poziomie do momentu upadku)

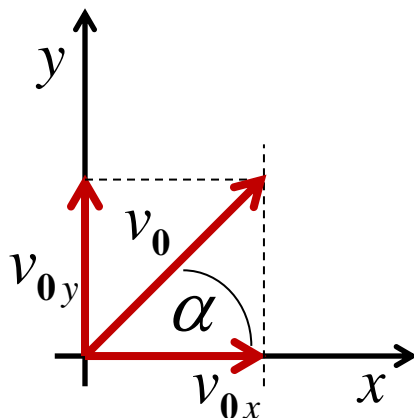
Rzut ukośny



Przyspieszenie w tym ruchu jest stałe i jest skierowane pionowo w dół i ma wartość g



Rzut ukośny



$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

składowe wektora prędkości w chwili początkowej

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

składowe wektora prędkości w dowolnej chwili t

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

współrzędne ciała w dowolnej chwili t

$$x = v_x t = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Równanie toru ruchu

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \alpha)^2}$$

← Eliminując czas

Czas wznoszenia do osiągnięcia maksymalnej wysokości

$$t_w = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Maksymalna osiągnięta wysokość:

Zasięg rzutu poziomego $Z = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$



Ruch po okręgu



Ruch po okręgu jest to ruch, w którym ciało porusza się po torze, który jest okręgiem.



INSTYTUT
INŻYNIERII
MATERIAŁOWEJ

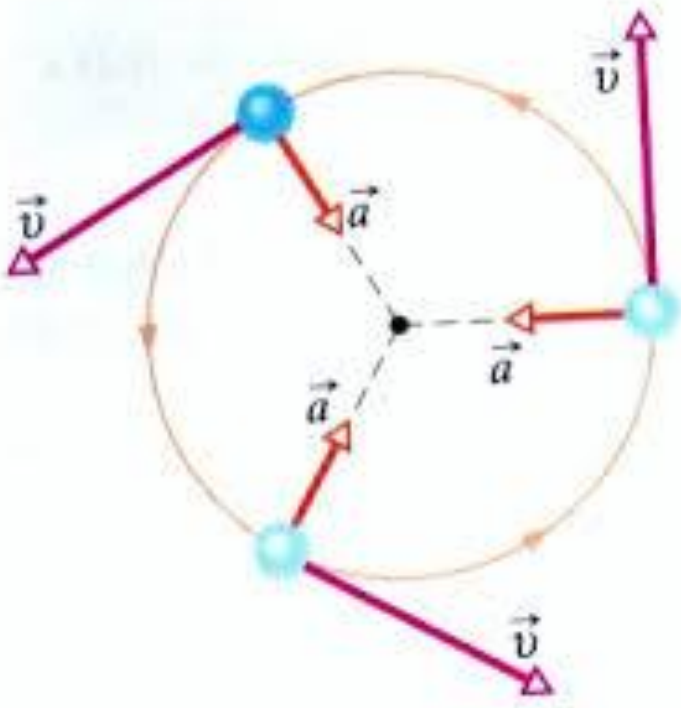


WYDZIAŁ MECHANICZNY
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ



INZYNIERIA MATERIAŁOWA PL

Ruch jednostajny po okręgu



Przyspieszenie dośrodkowe

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Okres obiegu

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

