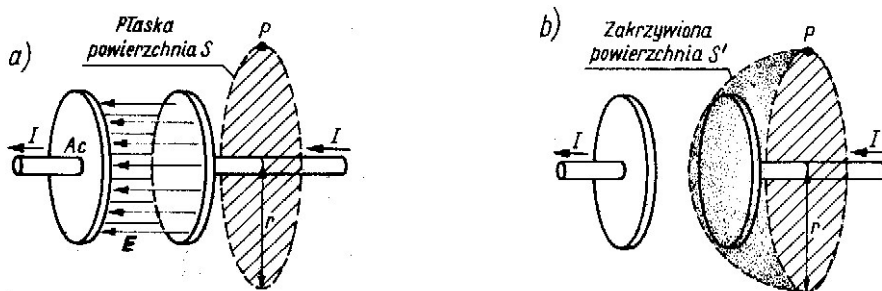


4. Promieniowanie elektromagnetyczne

4.1. Równania Maxwella w postaci ogólnej.

Na zakończenie wykładu 2 zostały podane cztery równania stanowiące podstawę wszystkich zjawisk elektromagnetycznych wywoływanych przez prądy i ładunki pozostające w spoczynku lub poruszające się ze stałą prędkością. Równania te są nazywane równaniami Maxwella dla elektrostatyki i magnetostatyki. Podczas omawiania prawa Faradaya, w którym pojawia się zmienny strumień magnetyczny (wywołany np. zmiennym w czasie prądem) konieczna była modyfikacja równania

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ do postaci $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$, gdzie $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ - jest strumieniem magnetycznym przez powierzchnię otoczoną konturem. Wykażemy teraz, że pojawienie się zmiennego pola elektrycznego wymaga również zmiany równania opisującego prawo Ampera.



Rys. 4.1. Prąd wpływa do płaskiego kondensatora. Powierzchnia na rys.a) obejmuje prąd I , natomiast powierzchnia otoczona tym samym konturem z rys.b) nie obejmuje prądu.

Rozpatrzmy przykład pokazany na rys 4.1. Kondensator płaski złożony z dwóch okrągłych okładek ładujemy prądem I . Pole magnetyczne w punkcie P możemy otrzymać stosując prawo Ampere'a do płaskiej powierzchni ograniczonej okręgiem o promieniu r .

Jeżeli podobnie rozumowanie zastosujemy do powierzchni S' pokazanej na rys 4.1b, to

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

bo prąd I przez tak zdefiniowaną powierzchnię nie przepływa.

Otrzymany rezultat jest sprzeczny z poprzednim wynikiem, o którym wiemy, że jest poprawny. Maxwell rozważając podobny przykład odkrył, że niespójność tę można usunąć dodając do prawej strony równania opisującego prawo

Ampere'a człon $\frac{1}{c^2} \int \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{A}$.

Sprawdźmy czy rozwiązuje to problem. Pole elektryczne, które przecina powierzchnia S' jest polem kondensatora płaskiego $E = 4 \pi k_0 Q / A_C$. Stąd

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi k_0}{A_C} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{4\pi k_0}{A_C} I.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$\int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \frac{4\pi k_0}{A_C} I \cdot A_C = 4\pi k_0 I \rightarrow \frac{1}{c^2} \int \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{A} = \frac{4\pi k_0}{c^2} I.$$

Jak widać dopisany człon daje po prawej stronie równania Ampere'a wynik analogiczny jak w przykładzie z rysunku 4.1a. Zatem poprawione przez Maxwella prawo Ampera przyjmie postać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi k_0}{c^2} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}. \quad 4.1$$

Pierwszy człon po prawej stronie jest rzeczywistym prądem płynącym przez dowolną powierzchnię ograniczoną zamkniętym konturem. Człon drugi Maxwell nazwał "prądem przesunięcia".

Możemy teraz jeszcze raz zapisać równania Maxwella w najogólniejszej postaci. Za pomocą tych równań możemy wyznaczyć \vec{E} i \vec{B} jako funkcje położenia i czasu, jeżeli znamy położenia i prędkości ładunków wytwarzających pole.

I. **Prawo Gausa** w którym $\int \rho dV = Q_{WEW}$, gdzie ρ - gęstość objętościowa ładunku

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k_0 \int \rho dV$$

II. **Prawo Faradaya**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

III. **Prawo ciągłości** linii sił pola magnetycznego

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

IV. **Prawo Ampere'a** (poprawione)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi k_0}{c^2} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Podsumowanie:

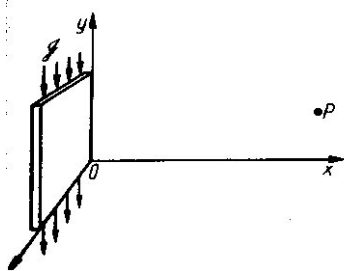
- Równania Maxwella są spełnione zarówno w materii jak i w próżni.
- Stosują się do wszystkich możliwych powierzchni i konturów, dając jednoznaczne rozwiązanie dla danego rozkładu ładunku i prądu.

- Maxwell opisał zjawiska elektryczne za pomocą czterech prostych równań, których matematyczną konsekwencją było wykazanie, że przyspieszony ładunek musi promieniować pole elektryczne i magnetyczne oddalające się od źródła z prędkością $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.
- Maxwell sformułował hipotezę, że światło to fale elektromagnetyczne o odpowiednich częstotliwościach, oraz, że powinny istnieć fale elektromagnetyczne o dowolnej częstotliwości od zera w górę.
- Stworzył teorię pola pozwalającą wytłumaczyć działanie na odległość.
- Przewidział możliwość komunikacji radiowej na długo przed tym, nim takie zjawisko zostało odkryte.
- Dzięki temu, że praca Maxwella jest syntezą tak wielu rozmaitych zjawisk fizycznych, jest uważana przez wiele osób za największe osiągnięcie fizyki klasycznej.

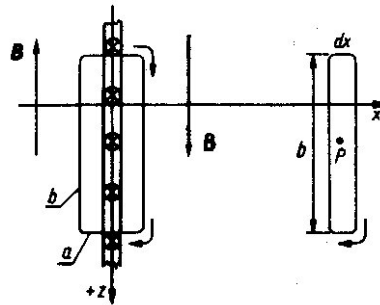
4.2. Promieniowanie elektromagnetyczne

Z IV równania Maxwella wynika, że zmieniający się prąd (czyli przyspieszane ładunki) daje zmieniające się pole magnetyczne, tzn. $\partial B / \partial t$ jest różne od zera. Wtedy, zgodnie z równaniem II musi pojawić się zmienne pole elektryczne $\partial E / \partial t$ różne od zera. Ta zmienność E daje ponownie wkład do B i tak dalej nawet po wyłączeniu pierwotnego źródła. Jeżeli energia pola nie ma możliwości rozproszenia się proces ten będzie trwał wiecznie, a zaburzenia pola będą się rozchodzić w przestrzeni z prędkością c będąca stałą proporcjonalności w równaniach Maxwella.

Rozważmy nieskończoną płaszczyznę yz o prądzie powierzchniowym J płynącym w kierunku ujemnych y (rys.4.2).



Rys.4.2. Wycinek płaszczyzny z prądem powierzchniowym J



4.3. Kontury pomocnicze do obliczenia pola B wokół płaszczyzny z prądem

Z prawa Ampere'a możemy dla tak zdefiniowanej powierzchni obliczyć B (rys 4.3).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi k_0}{c^2} J b \rightarrow 2B \cdot b = \frac{4\pi k_0}{c^2} J \cdot b \rightarrow B = \frac{2\pi k_0}{c^2} J \quad 4.2$$

Zależność 4.2 jest prawdziwa jedynie w pobliżu źródła, tzn. dla a dążących do zera, ponieważ wtedy powierzchnia konturu dąży do zera, co pozwala nam zaniedbać człon

$\frac{1}{c^2} \int \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{A}$ w IV równaniu Maxwella. Wykorzystanie równań Maxwella do obliczenia pola w punkcie P (rys.4.3) jest nieco bardziej skomplikowane i prowadzi do wyznaczenia zależności

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \quad 4.3$$

Prawa część zależności 4.3 jest klasycznym różniczkowym równaniem falowym. Jego rozwiązaniem jest fala rozchodząca się od źródła z prędkością c . Z lewej części zależności 4.3 wynika ponadto, że polu \vec{B} towarzyszy pole elektryczne $E = cB$ oraz, że pola \vec{E} i \vec{B} są do siebie prostopadłe.

Jeżeli prąd powierzchniowy będzie miał przebieg opisany zależnością $J = J_0 \cos \omega t$ to rozwiązania równania falowego 4.3 będą miały postać

$$B_z(x, t) = \frac{2\pi k_0}{c^2} J_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \rightarrow B_z(x, t) = B_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad 4.4$$

oraz

$$E_y(x, t) = c B_z = \frac{2\pi k_0}{c} J_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \rightarrow E_y(x, t) = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad 4.5$$

Jak widać z zależności 4.4 i 4.5 nieskończona płaszczyzna z sinusoidalnie zmiennym prądem $J = J_0 \cos \omega t$ będzie źródłem rozchodzących się w przestrzeni z prędkością c sinusoidalnie zmiennych wzajemnie sprzężonych pól elektrycznego i magnetycznego. Amplituda tych pól będzie stała w czasie i przestrzeni i zależna jedynie od amplitudy prądu wymuszającego $E_0 = 2\pi k_0 J_0 / c$.

Wprowadzimy teraz do zależności 4.4 i 4.5 pojęcie długości fali λ , czyli odległości między kolejnymi maksimami pola np. elektrycznego. Przyjmijmy, że pole E osiąga maksimum w chwili $t = 0$ i w punkcie x_1 . Zgodnie z definicją kolejne maksimum powinniśmy znaleźć w tej samej chwili w punkcie $x_2 = x_1 + \lambda$ stąd $\lambda = x_2 - x_1$. Na tym odcinku argument funkcji \cos musi zmienić się o 2π . Po podstawieniu otrzymamy

$$\omega \left(t - \frac{\lambda}{c} \right) = 2\pi \xrightarrow{t=0} \omega \frac{\lambda}{c} = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \xrightarrow{\omega=2\pi f} \lambda = \frac{c}{f} \quad 4.6$$

Przekształcając równanie 4.5 i podstawiając długość fali otrzymamy

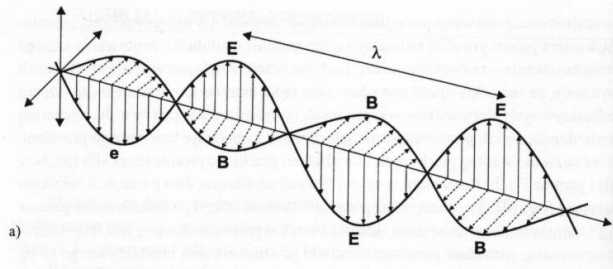
$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left(\omega t - \omega \frac{x}{c} \right) \rightarrow E_y(x, t) = E_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad 4.7$$

Często używana jest jeszcze jedna wielkość $k = 2\pi / \lambda$ nazywana liczbą falową. Po podstawieniu otrzymamy

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx). \quad 4.8$$

Ostatnie równanie jest często używane do opisu rozchodzącej się w przestrzeni fali elektromagnetycznej. Należy jednak pamiętać, że składowej elektrycznej pola zawsze towarzyszy prostopadła do niej składowa magnetyczna. Do opisu częściej używamy

składowej elektrycznej pola, bo ona jest łatwiej mierzalna i to ona odpowiada za namacalne skutki działania pola w postaci prądów indukowanych w antenach.



Rys.4.4. Wzajemne położenie wektorów \vec{E} i \vec{B} płaskiej fali elektromagnetycznej

4.3. Energia promieniowania

Jak wykazaliśmy wcześniej w polu elektrycznym i magnetycznym gromadzi się energia, której gęstość może być opisana zależnością

$$\frac{W}{S} = \frac{1}{8\pi k_0} (E^2 + c^2 B^2). \quad 4.9$$

Rozchodząca się od źródła fala elektromagnetyczna również unosi ze sobą energię. Do oceny mocy promieniowania elektromagnetycznego przypadającego na jednostkę powierzchni używa się wektora Poyntinga oznaczanego symbolem S i będącego iloczynem wektorowym \vec{E} i \vec{B} pomnożonym przez stałą $c^2 / 4\pi k_0$.

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi k_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad 4.10$$

Wykażemy że wektor Poyntinga jest w zgodzie z gęstością energii zawartej w polu elektromagnetycznym, a wyrażonej wzorem 4.9. Jeżeli powierzchnia na którą pada promieniowanie jest prostopadła do kierunku rozchodzenia się fali, to możemy w zależności 4.10 zrezygnować z zapisu wektorowego

$$S = \frac{c^2}{4\pi k_0} E \cdot B.$$

Zauważmy, że jeżeli moc opisaną wektorem Poyntinga podzielimy przez jednostkową odległość i pomnożymy przez czas jaki potrzebny jest fali niosącej energię na pokonanie tej odległości, czyli podzielimy przez prędkość światła, to otrzymamy średnią gęstość energii przypadającej na jednostkę objętości.

$$\frac{W}{S} = \frac{c^2}{4\pi k_0} E \cdot B \frac{1}{c} = \frac{c E B}{4\pi k_0} = \frac{c E B}{8\pi k_0} + \frac{c E B}{8\pi k_0} = \frac{E^2}{8\pi k_0} + \frac{c^2 B^2}{8\pi k_0} = \frac{1}{8\pi k_0} (E^2 + c^2 B^2)$$

Dowodząc powyższe skorzystaliśmy z zależności $E = cB$

4.4. Oddziaływanie promieniowania z materią

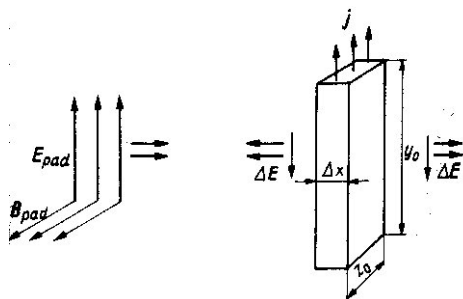
Jeżeli promieniowanie elektromagnetyczne napotyka na swej drodze ciało materialne, to w zależności od właściwości elektrycznych (optycznych) tego ciała będziemy obserwować trzy rodzaje zachowań:

1. promieniowanie będzie wnikać w ciało, a niesiona energia zostanie stopniowo rozproszona, zamieniając się na energię wewnętrzną ciała,

2. promieniowanie ulegnie odbiciu od powierzchni ciała,
3. promieniowanie przejdzie przez ciało bez strat energii z ewentualną zmianą kierunku rozchodzenia się fali.

W rzeczywistości najczęściej spotkamy ciała, w których w różnym nasileniu zaobserwujemy wszystkie opisane procesy.

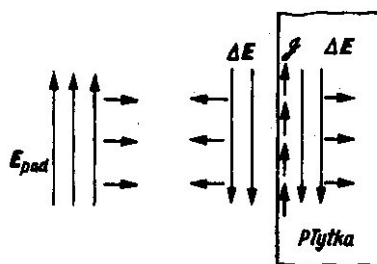
Zachowanie ciała w polu promieniowania zależy od tego czy zawiera ono w sobie i w jakiej liczbie swobodne ładunki mogące wziąć udział w przepływie prądu indukowanego pod wpływem składowej elektrycznej pola (rys.4.5).



Rys.4.5. Padająca fala indukuje w płytce prąd, który wytwarza własne pole promieniowania

Ad.1. Pierwsza grupa to ciała w których istnieją swobodne elektrony, ale ich przewodnictwo nie jest duże. Poruszające się pod wpływem składowej elektrycznej pola elektrony tracą energię w zderzeniach z siecią krystaliczną ciała, co skutkuje zanikiem promieniowania.

Ad.2. Odbicie promieniowania będzie miało miejsce w przypadku ciał dobrze przewodzących prąd (metale, nadprzewodniki). Docierające do takiego ciała pole elektryczne fali indukuje w warstwie przypowierzchniowej prąd o takim natężeniu, że towarzysząca mu własna fala elektromagnetyczna ma natężenie porównywalne z falą pierwotną (rys 4.6). Kierunki wektorów pola pierwotnego i wtórnego są takie, że wypadkowe pole wewnątrz metalowej płytki będzie równe zero, a w kierunku źródła wróci fala o amplitudzie zbliżonej do fali padającej.



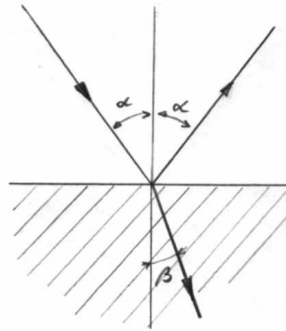
Rys.4.6. Fala padająca na płytę z bardzo dobrego przewodnika

Ad.3. Trzecia grupa ciał to izolatory (dielektryki), które nie zawierają swobodnych elektronów mogących brać udział w przepływie prądu. W ciałach tych jednak zewnątrz elektrony w poszczególnych atomach mogą pod wpływem pola elektrycznego ulegać przesunięciu względem położenia równowagi. Energia zabrana fali podczas tego przesunięcia zostanie zwrócona, gdyż elektron wróci do położenia równowagi generując przy tym własną falę przesuniętą w fazie o 90° w stosunku do fali pierwotnej. Fala opuszczająca płytkę izolatora będzie superpozycją fali pierwotnej

i przesuniętych w fazie fal wtórnych w efekcie czego fala ulegnie opóźnieniu. To opóźnienie będziemy obserwować jako zmniejszenie prędkości rozchodzenia się fali w dielektryku. Stosunek prędkości c rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni do prędkości v w danym ciele jest wielkością charakterystyczną dla tego ciała i nazywa się współczynnikiem załamania

$$n = \frac{c}{v} .$$

Oprócz zmiany prędkości współczynnik załamania określa również kąt załamania jakiemu ulega wiązka promieni przechodząc przez dany ośrodek. W tym przypadku obowiązuje zależność $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$; gdzie α i β są odpowiednio kątami padania i załamania wiązki (rys 4.7).



Rys 4.7. Współczynnik załamania światła

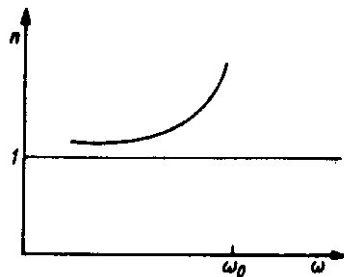
Analizując matematycznie drgania elektronów w płytce dielektryka można wyprowadzić zależność opisującą współczynnik załamania w funkcji częstotliwości padającej fali elektromagnetycznej ω .

$$n(\omega) = 1 + \frac{2\pi k_0 N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad 4.11$$

gdzie: N – koncentracja drgających elektronów, m – masa elektronu, ω_0 – częstotliwość drgań własnych elektronów.

Jak widać z analizy zależności 4.11 współczynnik załamania dielektryków zależy przede wszystkim od częstotliwość drgań własnych jego elektronów.

Zależność współczynnika załamania od częstotliwości nazywa się dyspersją. Przebieg tej zależności pokazuje rys 4.8.



Rys 4.8. Krzywa dyspersji normalnej według zależności 4.11

Dla większości ciał dielektrycznych i dla częstości fal z zakresu widzialnego obowiązuje zależność ($\omega_0 > \omega$) co daje współczynnik załamania większy od jedności i rosnący wraz z przechodzeniem od czerwieni do fioletu.

Wykład opracowany na podstawie książki:

Orear Jay „Fizyka - tom 2”