

## 2. Prąd elektryczny i pole magnetyczne

### 2.1. Prąd elektryczny.

Pojęciem prądu elektrycznego określamy zjawisko przemieszczania się ładunków elektrycznych. Najczęściej nośnikami ładunku elektrycznego są elektrony-tak przewodzą prąd wszystkie ciała stałe. Prąd może być także skutkiem przemieszczania się jonów, mówimy wówczas o prądzie jonowym. Ze zjawiskiem tym spotkamy się przy przepływie prądu przez elektrolity i podczas wyładowań elektrycznych w gazach. Natężenie prądu przepływającego przez daną powierzchnię definiuje się jako ładunek przepływający przez tę powierzchnię w jednostce czasu.

$$I = \frac{Q}{t} \quad 2.1$$

Jednostką natężenia prądu jest amper  $1A = 1C / 1s$  kulomb na sekundę.

Wielkością związaną z natężeniem prądu jest gęstość prądu elektrycznego zdefiniowana jako iloczyn gęstości ładunku  $\rho$  i prędkości jego przemieszczania  $v$ .

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad 2.2$$

Inna definicja gęstości prądu mówi, że jest to natężenie prądu przypadające na jednostkę powierzchni. Stąd jednostka gęstości równa  $A / m^2$  amper na metr kwadratowy.

Jeżeli pomnożymy gęstość prądu przez powierzchnię  $A$  płaszczyzny prostopadłej do  $j$  to otrzymamy natężenie prądu  $I$ .

$$I = \vec{j} \vec{A} \quad 2.3$$

Wektor  $\vec{A}$  ma kierunek prostopadły do płaszczyzny. Jeżeli  $\vec{j}$  zmienia się na powierzchni  $A$  to natężenie prądu obliczymy z całki

$$I = \int \vec{j} d\vec{A} \quad 2.4$$

Rozpatrzmy przepływ prądu przez przewodnik metalowy, w którym nośnikami prądu będą swobodne elektrony poruszające się między uwieczonymi w sieci krystalicznej jonami. Bez zewnętrznego pola elektrycznego elektrony przewodnictwa poruszają się chaotycznie we wszystkich kierunkach, a ich wypadkowa prędkość jest równa zero. Jeżeli w jednostce objętości znajduje się  $N$  elektronów przewodnictwa, to  $\rho = Ne$  jest gęstością ładunku. Wtedy gęstość prądu możemy zapisać w postaci  $j = Ne v_d$  gdzie  $v_d$  jest wypadkową prędkością unoszenia elektronów przewodnictwa wywołaną zewnętrznym polem elektrycznym. Natężenie prądu otrzymamy mnożąc  $j$  przez powierzchnię przewodnika  $A$ .

$$I = Ne v_d A \quad 2.5$$

### 2.2. Prawo Ohma

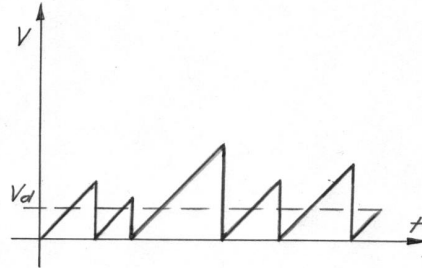
Jeżeli pod wpływem przyłożonej do przewodnika różnicy potencjałów  $U$  popłynie prąd  $I$ , to możemy powiedzieć, że przewodnik ma oporność  $R$  określoną zależnością

$$R = \frac{U}{I} \quad 2.6$$

Równanie powyższe jest definicją oporu elektrycznego (rezystancji). Prawo Ohma dotyczy rezystancji przewodników metalowych i mówi, że rezystancja ta jest

niezależna od wartości prądu płynącego przez przewodnik pod warunkiem, że pozostaje on w stałej temperaturze. Prawo Ohma nie jest prawem podstawowym, a jedynie konsekwencją struktury materii i podstawowych praw oddziaływania międzycząsteczkowego.

Jednostką oporu elektrycznego jest  $1\Omega = 1V / 1A$ .



Rys.2.1 Zmiany prędkości unoszenia w ruchu pojedynczego elektronu w metalu.

Rozważmy jeszcze raz wspomniany wcześniej przewodnik metalowy. Przyłożone z zewnątrz napięcie sprawi, że na każdy elektron przewodnictwa będzie działała siła  $F = eE$ . Pod działaniem tej siły, po średnim czasie  $\tau$  każdy z elektronów, osiągnie prędkość równą  $2v_d$ , a następnie ulegnie zderzeniu z siecią krystaliczną (rys.2.1). Prędkość  $v_d$  możemy obliczyć z drugiego prawa Newtona.

$$ma = F \rightarrow m \frac{2v_d}{\tau} = eE \rightarrow v_d = \frac{e\tau E}{2m} \quad 2.7$$

Podstawiając zależność 2.7 do wzoru na gęstość prądu  $j = N e v_d$  otrzymamy inną postać prawa Ohma, często używaną przy opisie właściwości elektrycznych ciał stałych

$$j = N e v_d \rightarrow j = \frac{N e^2 \tau}{2m} E \rightarrow j = \sigma E \quad \text{gdzie} \quad \sigma = \frac{N e^2 \tau}{2m} \quad 2.8$$

Wielkość  $\sigma$  nazywa się przewodnością właściwą metalu.

### 2.3. Straty ciepłne i moc prądu

Każde zderzenie elektronu przewodnictwa z atomem sprawia, że traci on uzyskaną od pola elektrycznego energię. Tracona przez elektron energia jest przekazana sieci krystalicznej, co objawia się wzrostem temperatury przewodnika. Przyjmijmy, że w czasie  $t$  przez przewodnik przepłynął ładunek  $Q$ , zyskując po drodze energię  $W = QU$  (patrz zależność 1.13). Jeżeli przyjmijmy, że cała energia została przekazana sieci krystalicznej, to moc strat w takim przewodniku możemy opisać zależnością

$$P = \frac{W}{t} = \frac{UQ}{t} = UI \rightarrow P = UI \quad 2.9$$

Wielkość  $P$  jest mocą elektryczną zamienioną w ciepło. Jednostką mocy jest wat  $1W = 1V \times 1A$ . Korzystając z prawa Ohma można zależność 2.9 przedstawić jako funkcję jedynie  $I$  lub  $U$

$$P = U^2 / R \quad \text{lub} \quad P = I^2 R \quad 2.10$$

Jak widać, aby w przewodniku utrzymać stały prąd, potrzebne jest źródło energii elektrycznej. Najczęściej korzystamy ze źródeł w postaci baterii i generatorów elektrycznych. W elektrotechnice takie źródła energii nazywane są źródłami siły

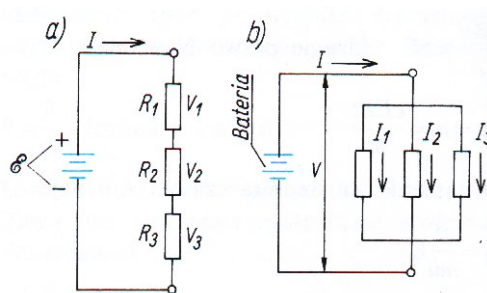
elektromotorycznej SEM. Siłę elektromotoryczną oznaczamy symbolem  $E$  i definiujemy jako

$$E = \frac{\Delta W}{\Delta q} \quad 2.11$$

gdzie  $\Delta W$  jest energią przekazana ładunkowi  $\Delta q$ , gdy przechodzi przez źródło SEM.

## 2.4. Obwody prądu stałego

Pod pojęciem obwodów prądu stałego będziemy rozumieć połączone w jeden układ źródła siły elektromotorycznej i odbiorniki energii charakteryzujące się określoną rezystancją. Rysunek 2.2 pokazuje przykłady takich obwodów.



Rys.2.2. Obwody elektryczne z szeregowym i równoległym połączeniem rezystorów

Na rys. 2.2a źródło siły elektromotorycznej (źródło napięcia) zasila układ trzech rezystorów połączonych szeregowo. W układzie tym przez wszystkie rezystory płynie ten sam prąd, a napięcie źródła będzie sumą napięć na poszczególnych rezystorach.

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

Dzielimy strony równania przez  $I$

$$\frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} \quad 2.12$$

W oparciu o definicje oporu z zależności 2.12 otrzymamy wzór na rezystancję zastępczą przy szeregowym połączeniu rezystorów.

$$R_C = R_1 + R_2 + R_3 \quad 2.13$$

Przy połączeniu równoległym rezystorów rys.2.2b prąd całkowity wypływający ze źródła będzie sumą prądów przepływających przez poszczególne rezystory.

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Dzielimy strony przez  $V$  otrzymamy

$$\frac{I}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} \rightarrow \frac{1}{R_C} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad 2.14$$

Przy równoległym połączeniu oporów odwrotność oporu całkowitego jest równa sumie odwrotności poszczególnych oporów.

Do obliczania bardziej złożonych obwodów wykorzystuje się tzw. prawa Kirchhoffa.

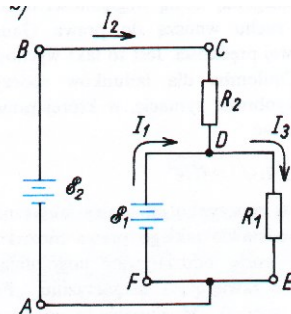
I prawo Kirchhoffa wynika z zasady zachowania ładunku i mówi, że suma prądów w dowolnym węźle układu musi być równa zero.

$$\sum_{x=1}^n I_x = 0$$

II prawo Kirchhoffa wynika z zasady zachowania energii i mówi, że w każdym oczku obwodu suma sił elektromotorycznych i spadków napięć na odbiornikach musi być równa zero.

$$\sum (E, U) = 0$$

Jako przykład rozważmy obwód pokazany na rys. 2.3. składający się z dwóch oczek.



Rys.2.3. Przykład złożonego obwodu elektrycznego

Na podstawie I prawa Kirchhoffa możemy dla węzła D napisać:

$$I_2 + I_1 - I_3 = 0$$

W oparciu o II prawo Kirchhoffa napiszemy równania

$$E_2 - I_2 R_2 - E_1 = 0 \quad \text{dla oczka ABCDF}$$

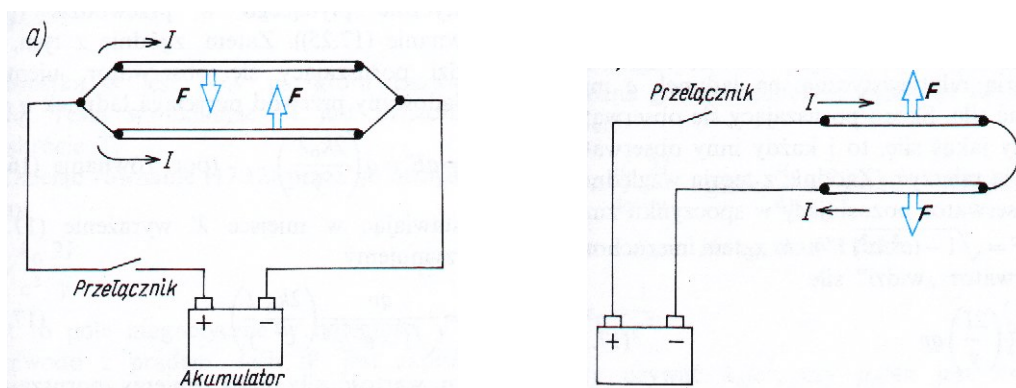
$$E_1 - I_3 R_1 = 0 \quad \text{dla oczka DEF}$$

Otrzymaliśmy układ trzech równań z trzema niewiadomymi prądami  $I_1, I_2, I_3$ . Rozwiązanie układu równań pozwala na wyliczenie prądów. Obliczone prądy wykorzystujemy w następnym kroku do wyznaczenia w oparciu o prawo Ohma spadków napięć na odbiornikach.

## 2.5. Siła magnetyczna

Jeżeli ładunki elektryczne przemieszczają się wzajemnie względem siebie, to oprócz siły elektrostatycznej wynikającej z prawa Coulomba, pojawia się dodatkowa siła zwana magnetyczną ściśle związana z prędkością poruszających się ładunków.

Działanie tej siły możemy zaobserwować przepuszczając prąd przez dwa położone blisko siebie przewody (rys.2.4).

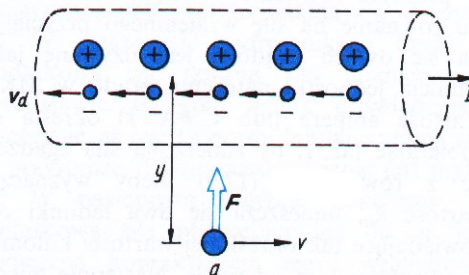


Rys. 2.4. Siły działające między przewodami z prądem

Zmierzono doświadczalnie, że na ładunek  $q$  poruszający się równoległe do przewodu z prądem  $I$ , działa siła proporcjonalna do prądu i odwrotnie proporcjonalna do odległości ładunku od przewodu  $y$ .

$$F = (10^{-7}) \left( \frac{2I}{y} \right) (qv) \quad 2.15$$

Istnienie siły magnetycznej proporcjonalnej do  $qv$  jest konieczną konsekwencją teorii względności. Teoria ta wprowadza dla obiektów poruszających się tzw. czynnik  $\gamma = \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ . W przypadku ładunku  $q$  poruszającego się wzdłuż przewodu z prądem (rys.2.5) teoria względności dowodzi, że z punktu widzenia ładunku  $q$  jony w przewodzie z prądem okażą się rozmieszczone rzadziej o czynnik  $\gamma$  niż poruszające się elektrony. Ta relatywistyczna różnica gęstości ładunków w przewodzie jest źródłem siły magnetycznej.



Rys 2.5. Ładunek elektryczny poruszający się wzdłuż przewodu z prądem

Aby ułatwić zrozumienie mechanizmu powstawania siły magnetycznej zauważmy na rysunku 2.5, że poruszający się ładunek  $q$  częściej mija pędzące naprzeciw niego elektrony niż nieruchome jony sieci krystalicznej.

W oparciu o teorię względności można wykazać, że w przypadku przedstawionym na rys 2.5 na ładunek  $q$  będzie działać siła określona zależnością

$$F = \frac{k_0}{c^2} \left( \frac{2I}{y} \right) qv \quad 2.16$$

Porównanie równań 2.15 i 2.16 prowadzi do zależności  $k_0 = c^2 10^{-7} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ .

Taka właśnie wartość  $k_0$  z dokładnością do błędów pomiaru otrzymamy z doświadczenia.

## 2.5. Pole magnetyczne

Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego, możemy zdefiniować pole magnetyczne  $B$  jako siłę magnetyczną na jednostkę ( $qv$ )

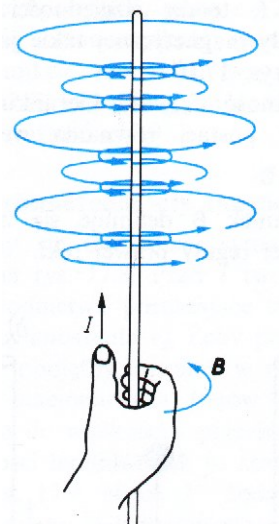
$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_m}{q\vec{v}} \quad 2.17$$

Jednostką  $\vec{B}$  jest tesla  $T = \text{N} / \text{Am}$ . Jeżeli zależność 2.16 podzielimy przez  $qv$  to otrzymamy wzór na pole magnetyczne w odległości  $y$  od przewodu z prądem.

$$B = \frac{k_0}{c^2} \frac{2I}{y} \quad 2.18$$

Zależności powyższe obowiązują, gdy  $q$  porusza się równoległe do  $I$ . W przypadku ogólnym musimy skorzystać z rachunku wektorowego. Wzór na siłę magnetyczną przyjmie postać

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad 2.19$$



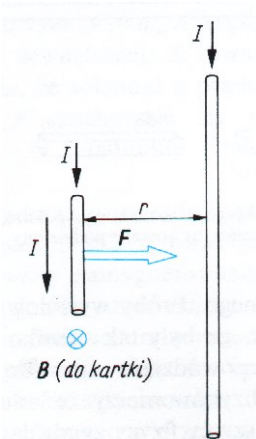
Kierunek wektora  $\vec{B}$  definiuje się za pomocą reguły prawej ręki. Jeżeli kciuk prawej ręki jest skierowany wzdłuż przewodu z prądem  $I$ , to zgięte palce wskazują kierunek  $\vec{B}$ . Linie pola  $B$  zataczają okręgi wokół przewodu (rys 2.6).

Rys.2.6. Linie pola  $B$  pochodzące od prądu płynącego w długim prostym przewodzie. Reguła prawej ręki.

Przekształćmy zależność 2.19 tak, aby otrzymać siłę  $d\vec{F}$  działającą na element  $d\vec{l}$  przewodu z prądem w polu magnetycznym  $B$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = dq \left( \frac{d\vec{l}}{dt} \right) \times \vec{B} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad 2.20$$

Wykorzystajmy zależność  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$  do obliczania siły działającej na jednostkę długości przewodów z prądem, oddalonych od siebie o  $r$  (rys 2.7)



$$\frac{F}{l} = I \cdot B = I \frac{k_0}{c^2} \frac{2I}{r} = \frac{2k_0}{c^2} \frac{I^2}{r}$$

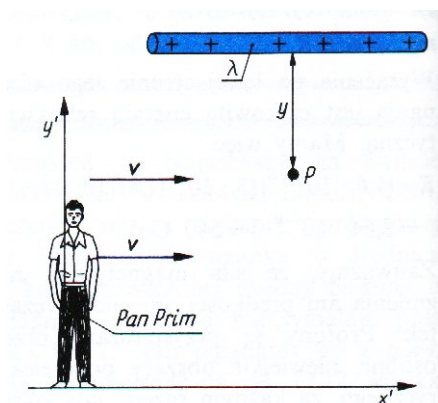
Dla  $r = 1\text{m}$  i  $I = 1\text{A}$  otrzymamy  $F/l = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$ . Tak wyliczona wartość siły jest podstawą definicji jednostki prądu w układzie SI – ampera.

Rys.2.7. Siła przyciągania między dwoma równoległymi prądami

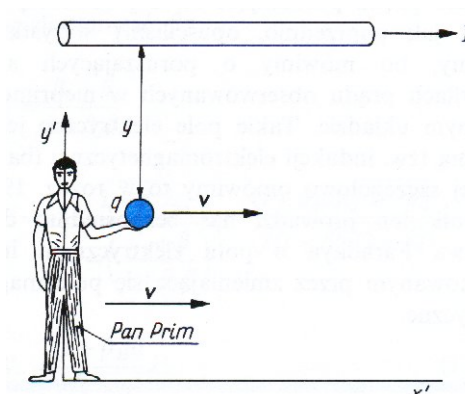
Zauważmy, że  $\vec{F}_m$  działa zawsze prostopadle do  $\vec{v}$ , co oznacza, że siła magnetyczna nie może wpływać na wartość energii poruszającego się ładunku. Ładunek wprowadzony z prędkością  $v$  prostopadle do linii sił w obszarze jednorodnego pola magnetycznego będzie poruszał się po okręgu z przyspieszeniem dośrodkowym równym  $v^2/R$ . Równanie ruchu takiego ładunku przyjmie postać

$$m \frac{v^2}{R} = qvB \quad 2.21$$

Można wykazać że dla poruszającego się obserwatora, pola  $\vec{B}$  i  $\vec{E}$  przechodzą wzajemnie jedno w drugie. Z fizycznego punktu widzenia powinniśmy mówić o jednym polu elektromagnetycznym.



Rys 2.8. Obserwator poruszający się wzdłuż naładowanego pręta



Rys.2.9. Obserwator poruszający się wzdłuż przewodu z prądem

Rozważmy przypadek pokazany na rysunku 2.8. W układzie tym naładowany pręt generuje w punkcie P pole elektryczne opisane zależnością  $E = 2k_0\lambda/y$ , gdzie  $\lambda$  jest gęstością ładunku w przewodzie. Jednak dla poruszającego się z prędkością  $v$  obserwatora naładowany pręt będzie widoczny jak płynący w lewo prąd o wartości  $I = \lambda v$ . Zgodnie z równaniem 2.18 prąd ten będzie źródłem pola magnetycznego

$$B = \frac{k_0}{c^2} \frac{2(\lambda v)}{y} \quad 2.22$$

Przekształcając zależność 2.22 otrzymamy

$$B = \frac{k_0}{c^2} \frac{2(\lambda v)}{y} = \frac{v}{c^2} \frac{2k_0\lambda}{y} = \frac{v}{c^2} E \quad 2.23$$

Ogólnie można wykazać, że układ ładunków poruszających się z taką samą prędkością będzie źródłem pola magnetycznego opisanego zależnością

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \quad 2.24$$

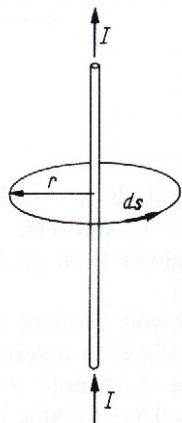
Podobne rozumowanie przeprowadzone dla przypadku pokazanego na rysunku 2.9 kiedy wzdłuż nieruchomego przewodu z prądem porusza się obserwator z prędkością  $v$ , prowadzi do zależności

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad 2.25$$

Zależność powyższa opisuje pole elektryczne generowane przez źródło prądu poruszające się z prędkością  $v$ .

## 2.6. Prawo Ampere'a

Do obliczania pól magnetycznych występujących wokół różnych rozkładów prądów wykorzystywane jest prawo Ampere'a będące magnetycznym odpowiednikiem prawa Gaussa. W prawie Ampere'a obliczamy całkę z  $\vec{B}$  po zamkniętym konturze otaczającym przewody z prądem.



Rozpatrzmy przewód z prądem pokazany na rysunku 2.10. Obliczmy całkę krzywoliniową po konturze zamkniętym wokół przewodu. Niech kontur ten będzie okręgiem o promieniu  $r$ . Korzystając z faktu, że  $\vec{B}$  i  $d\vec{s}$  są w każdym punkcie okręgu równoległe oraz z podanej wcześniej zależności 2.18 opisującej pole w odległości  $y$  od przewodu możemy napisać:

$$\oint_{okr.} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds = B \oint ds = \frac{2k_0 I}{c^2 r} (2\pi r) = \frac{4\pi k_0}{c^2} I$$

Rys.2.10. Zamknięty kontur wokół przewodu z prądem

Można wykazać, że powyższa zależność jest słuszna dla dowolnego konturu obejmującego sumę prądów  $I_{wev}$ . Możemy więc prawo Ampere'a zapisać w postaci

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi k_0}{c^2} I_{wev} \quad 2.26$$

Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego, możemy dla pola magnetycznego zdefiniować strumień magnetyczny odpowiadający liczbie linii sił pola  $\vec{B}$  przechodzących przez powierzchnię  $S$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad 2.27$$

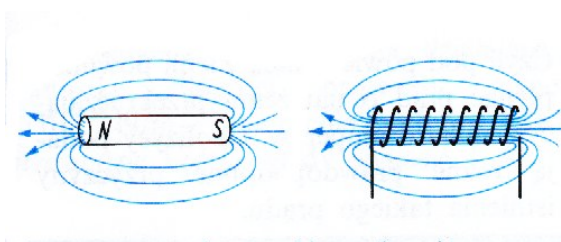
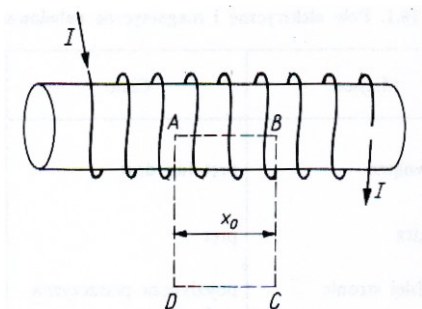
Można udowodnić że strumień obliczony po dowolnej powierzchni zamkniętej musi być równy zero.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad 2.28$$

Wynika to z faktu, że linie sił pola magnetycznego są liniami zamkniętymi, a strumień wpływający do obszaru ograniczonego powierzchnią całkowania musi być równy strumieniowi opuszczającemu ten obszar.

## 2.7. Pola magnetyczne dla różnych rozkładów prądów

**Długi solenoid.** Wykorzystamy prawo Ampere'a do obliczenia pola magnetycznego wewnątrz długiego solenoidu (rys.2.11).



Rys. 2.11. Solenoid z prądem.

2.12. Linie pola magnetycznego magnesu i solenoidu

Niech  $n$  będzie liczbą zwojów na jednostkę długości solenoidu. Wtedy  $I_{wev} = nI x_0$  będzie prądem objętym konturem ADCD. Na podstawie prawa Ampere'a możemy napisać



$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi k_0}{c^2} I_{wew} = 4\pi \frac{k_0}{c^2} (nI x_0)$$

W wyniku całkowania otrzymamy

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_{wew} \int_{AB} ds + \int_{BC} \vec{B} d\vec{s} + B_{zew} \int_{CD} ds + \int_{DA} \vec{B} d\vec{s} = B_{wew} x_0$$

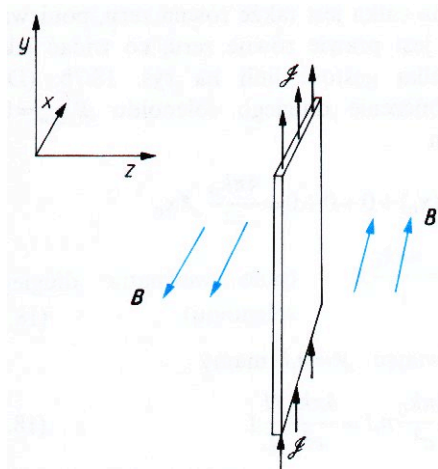
Taki wynik całkowania wynika z wzajemnych położenia wektorów  $\vec{B}$  i  $d\vec{s}$  na poszczególnych odcinkach konturu. Pominięto również składnik całki pochodzący od pola zewnętrznego ze względu na duże różnice w gęstości linii sił pola (patrz rys 2.12). Porównując obliczone całki otrzymamy

$$B_{wew} x_0 = 4\pi \frac{k_0}{c^2} (nI x_0) \rightarrow B_{wew} = \frac{4\pi k_0}{c^2} nI = \frac{4\pi k_0}{c^2} \frac{N}{L} I \quad 2.29$$

gdzie  $N$  jest całkowitą liczbą zwojów, a  $L$  długością solenoidu.

Warto zauważyć, że pole wewnątrz solenoidu jest jednorodne i nie zależy od kształtu cewki pod warunkiem, że jest ona dostatecznie długa. Wydłużanie solenoidu będzie jednocześnie zmniejszać do zera jego pole zewnętrzne. Solenoid dla pola magnetycznego jest odpowiednikiem kondensatora płaskiego dla pola elektrycznego.

**Płaszczyzna prądu.** Rozważmy płaszczyznę wytyczoną przez osie  $x$  i  $y$  prostokątnego układu współrzędnych (rys.2.13).



Niech w kierunku osi  $y$  płynie prąd powierzchniowy o gęstości  $J$ . W oparciu o definicje gęstości prądu  $J = \sigma v$  możemy analogiczną płaszczyznę prądu uzyskać przesuwając naładowaną płaszczyznę wzdłuż jej długości z prędkością  $v$ . Takie podejście pozwala na obliczenie pola magnetycznego generowanego przez płaszczyznę prądu w oparciu o zależność 2.23 i wzór  $E = 2\pi k_0 \sigma$ . W efekcie otrzymamy:

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \rightarrow B = \frac{2\pi k_0}{c^2} J \quad 2.30$$

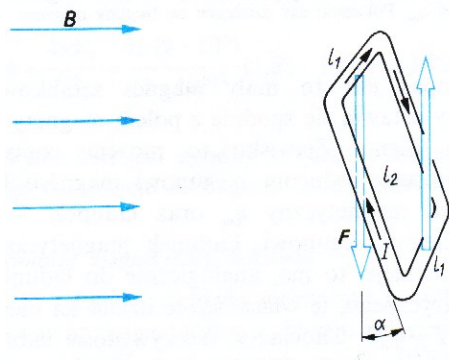
Rys.2.13. Płaszczyzna z prądem powierzchniowym  $J$

Efekt płaszczyzny prądu jest wykorzystywany do wyjaśnienia zjawisk związanych z odbiciem fal elektromagnetycznych (np. odbicie światła od powierzchni metalicznych).

## 2.8. Moment magnetyczny

Rozważmy prostokątną ramkę z prądem  $I$  umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym  $B$  (rys. 2.14). Pytamy jaki moment obrotowy działa na ramkę?

Obliczmy w oparciu o zależność  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ , siły działające na poszczególne odcinki



ramki. Ze względu na przeciwne kierunki prądów siły na odcinkach  $l_2$  znoszą się wzajemnie. Siły działające na odcinkach  $l_1$  będą współdziałać dając w efekcie moment obrotowy równy

$$T = 2 F (\frac{1}{2} l_2 \sin \alpha) = 2 (I l_1 B) (\frac{1}{2} l_2 \sin \alpha)$$

$$T = (I A) B \sin \alpha \quad 2.31$$

gdzie  $A = l_1 l_2$  jest polem powierzchni objętym ramką z prądem.

Rys.2.14. Ramka z prądem w jednorodnym polu magnetycznym

Występujący we wzorze iloczyn natężenia prądu i pola powierzchni ramki nazywamy momentem magnetycznym i oznaczamy symbolem  $\mu$ .

$$\mu = I A \quad 2.32$$

Zauważmy, że elektron krążący po orbicie wokół jądra będzie źródłem pola magnetycznego podobnie jak ramka z prądem. Obliczmy orbitalny moment magnetyczny elektronu. Natężenie prądu elektronowego znajdziemy mnożąc ładunek elektronu przez częstość jego ruchu po orbicie  $I = e (v/2\pi r)$ . Pole powierzchni orbity będzie równe  $\pi r^2$ . Zgodnie z równaniem 2.32 otrzymamy

$$\mu_e = I A = \left( \frac{ev}{2\pi r} \right) (\pi r^2) = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m} (mvr) = \frac{e}{2m} L \quad 2.33$$

Gdzie  $L = mvr$  jest orbitalnym momentem pędu elektronu. Mechanika kwantowa dowodzi że orbitalny moment pędu elektronu jest wielkością skwantowaną o kwancie równym  $L = h/2\pi$ , gdzie  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J s jest stałą Plancka. Zatem, minimalny moment magnetyczny elektronu wynosi

$$\mu_e = \frac{e}{2m} \frac{h}{2\pi} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2 \quad 2.34$$

Jeżeli atomy w ciele stałym ustawią się tak, że momenty magnetyczne ich elektronów będą się dodawać to otrzymamy źródło pola magnetycznego nazywane magnesem.

## 2.9. Równania Maxwella dla prądów stałych.

W trakcie dotychczasowych wykładów omówiliśmy cztery podstawowe równania opisujące pola magnetyczne  $B$  i elektryczne  $E$  nazywane równaniami Maxwella. Równania te zostały zebrane w tabeli 2.1 i przedstawione w dwóch wersjach. Kolumna II tablicy zawiera równania w wersji wykorzystującej stałą Coulomba  $k_0$ . Taki zapis równań był omawiany w trakcie wykładu. W elektrotechnice często równania Maxwella używane są w postaci zawierającej stałe  $\mu_0$  i  $\epsilon_0$  (III kolumna tablicy).

Tablica 2.1. Równania Maxwella dla prądów stałych

	Równania ze stałą $k_0$	Równania ze stałymi $\epsilon_0$ i $\mu_0$
I	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k_0 Q_{\text{wewn.}}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wewn.}}$
II	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
III	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
IV	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi k_0}{c^2} I_{\text{wev}}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{wev}}$

Przypomnijmy krótko sens fizyczny równań z tablicy

I – Prawo Gaussa, mówi że całkowity strumień elektryczny (liczba linii sił) wychodzący z naładowanego ciała jest równy wypadkowemu ładunkowi tego ciała pomnożonemu przez  $(4\pi k_0)$ .

II – Różnica potencjałów, a tym samym praca potrzebna do przeniesienia ładunku w polu elektrycznym, nie zależy od drogi, po której to przenoszenie następuje.

III – Strumień magnetyczny wchodzący do obszaru ograniczonego powierzchnią zamkniętą musi być równy strumieniowi opuszczającemu tę powierzchnię.

IV – Prawo Ampere’a opisuje ilościowy związek między natężeniem prądu  $I$ , a polem magnetycznym  $B$ .

Z porównania równań kolumny II i III otrzymamy

$$4\pi k_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \quad i \quad \frac{4\pi k_0}{c^2} = \mu_0 \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad 2.35$$

Zależność 2.35 pokazuje związek między przenikalnością elektryczną próżni  $\epsilon_0$ , przenikalnością magnetyczną próżni  $\mu_0$ , a prędkością światła  $c$ .

Wykład opracowany na podstawie książki:

Orear Jay „Fizyka - tom 1”